جزوه دستنویس درس استاتیک

نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک تدریس شده توسط مهندس ***احمدرضا جعفری***

دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

گروه عمران

1387

WWW.iransaze.com

WWW.jafarii.blogfa.com

WWW.iransaze.com

با تشکر از خانم شهلا نباتی برای در اختیار قرار دادن این جزوه

هشدار: این جزوه توسط مدرس درس مورد بازبینی قرار نگرفته است و ممکن است ایراداتی هم در آن وجود داشته باشد. استفاده از مطالب ارایه شده با مسئولیت فرد استفاده کننده خواهد بود.

کلیه حقوق این اثر مربوط به مدرس درس ، آقای مهندس احمدرضا جعفری است. هرگونه استفاده و تکثیر به هر شکل از این جزوه تنها با ذکر نام نویسنده و ذکر منبع جزوه (سایت ایران سازه) امکانپذیر است

WWW.iransaze.com

بردارها:

- انواع کمیت های اسکالر و کمیت های برداری:

کمیت های اسکالر:

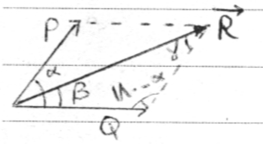
کمیت هایی هستند که تنها دارای اندازه هستند مانند: حجم، مسافت طی شده و زمان

کمیت های برداری:

کمیت هایی هستند که علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز می باشند مانند: نیرو، شتاب، گشتاور و سرعت

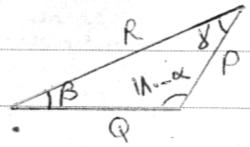
روش های جمع برداری:

۱) روش متوازی الاضلاع



$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$|R|^2 = |P|^2 + |Q|^2 + 2|P||Q|\cos\alpha$$



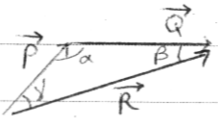
$$\frac{|R|}{\sin(180-\alpha)} = \frac{|P|}{\sin\beta} = \frac{|Q|}{\sin\gamma}$$

$$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{|R|}{\sin\alpha} = \frac{|P|}{\sin\beta} = \frac{|Q|}{\sin\gamma} \Rightarrow \begin{cases} \beta = __ \\ \gamma = __ \end{cases}$$

با محاسبه یکی از دو زاویه β یا γ می توان زاویه بردار نتیجه با یکی از دو راستای اصلی افقی یا عمودی را بدست آورد

۲) روش مثلث $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$



$$|R|^2 = |P|^2 + |Q|^2 - 2|P||Q|\cos\alpha$$

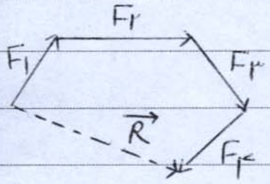
$$\frac{|R|}{\sin\beta} = \frac{|R|}{\sin\alpha} = \frac{|Q|}{\sin\gamma}$$

Tamasha

WWW.iransaze.com

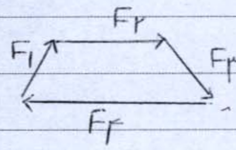
۳) روش ترسیمی

در این روش بردارها بطور متوالی ترسیم می‌گردند بگونه‌ای که ابتدای هر بردار بر انتهای بردار قبلی منطبق گردد. برداری که ابتدای اولین بردار را به انتهای آخرین بردار وصل می‌کند بردار برآیند می‌باشد. در این رسم لازم است که ترسیم بردارها به صورت دقیق و با مقیاس مناسب انجام گیرد.



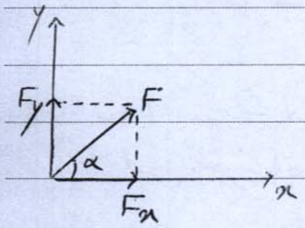
$$\vec{R} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

نکته: اگر پس از ترسیم ابتدای اولین بردار و انتهای آخرین بردار بر هم منطبق شوند برآیند بردارها صفر می‌باشد.



۴) روش جمع مؤلفه‌های برداری:

در این روش هر بردار را به مؤلفه‌های اصلی خود در راستای محورهای اصلی تجزیه می‌کنیم و سپس این مؤلفه‌ها را در راستای هر یک از جهات اصلی با هم جمع جبری می‌کنیم. مقادیری که بدست می‌آید مؤلفه‌های برداری، بردار برآیند در هر یک از راستاهای اصلی خواهد بود.



$$\Rightarrow F_x = |F| \cos\alpha$$

$$F_y = |F| \sin\alpha$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

$\vec{i}$ و $\vec{j}$ بردارهای یکه در راستای هر یک از دو محور اصلی x و y هستند

بردار یکه: برداریست به بزرگی واحد و هم راستا و هم جهت با بردار اصلی

Tamasha

WWW.iransaze.com

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots + \vec{F_n}$$

$$\vec{R} = \vec{R_x i} + \vec{R_y j}$$

$$F_1 = F_{1x} i + F_{1y} j$$

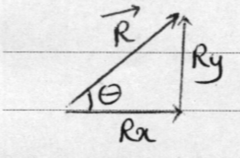
$$F_2 = F_{2x} i + F_{2y} j$$

$$F_n = F_{nx} i + F_{ny} j$$

$$\Rightarrow \quad R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + \dots + F_{nx}$$

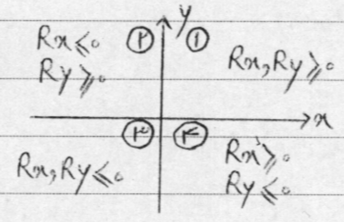
$$R_y = \sum F_{iy} = F_{1y} + \dots + F_{ny}$$

$$\Rightarrow |R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$



$$\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

برحسب آنکه مقادیر Rx و Ry دارای چه علامتی باشند بردار نتیجه در یکی از چهار ناحیه دستگاه مختصات قرار می گیرد



بردارها در فضا:

در حالت سه بعدی بردارها علاوه بر دو بعد x و y دارای یک مولفه در راستای محور z نیز می باشند بردار یکه در راستای محور z با K نمایش داده می شود

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda}$$

$\vec{\lambda}$: بردار یکه بردار F است که دارای بزرگی (1) و هم موازات بردار F می باشد

$$\lambda = \frac{\vec{F}}{|F|} = \frac{F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

$$\vec{\lambda} = \lambda_x i + \lambda_y j + \lambda_z k$$

$$\lambda_x = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \dots$$

Tamasha

WWW.iransaze.com

$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$

α : زاویه بردار F با محور x

β : 〃 〃 〃 y

γ : 〃 〃 〃 z

$\vec{\lambda} = \underbrace{\cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k}_{\text{کسینوس های هادی بردار } F}$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$$\begin{cases} F_x = |F| \cdot \cos\alpha \\ F_y = |F| \cdot \cos\beta \\ F_z = |F| \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

نیرویی که اندازه دو نقطه از خط اثر آن معلوم است:

فرض کنید که بردار $\vec{F}$ با $|F|$ موجود است این بردار از نقطه M به سمت نقطه N می باشد، مؤلفه های برداری این بردار به شکل زیر محاسبه می شود

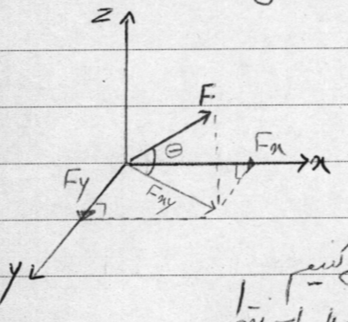
$M(x_1, y_1, z_1)$

$N(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \vec{MN} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda} \quad , \quad \lambda = \frac{\vec{MN}}{|MN|}$$

مؤلفه های یک بردار فضایی بر روی یکی از صفحات اصلی:



$\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$

فرض کنیم می خواهیم تصویر یا مؤلفه این بردار را در صفحه xy بدست آوریم از انتهای بردار F به موازات محور z یک عمود بر صفحه xy ترسیم می کنیم تا این صفحه را در یک نقطه قطع کند برداری که ابتدای بردار را به نقطه بدست آمده وصل می کند تصویر بردار خواهد بود

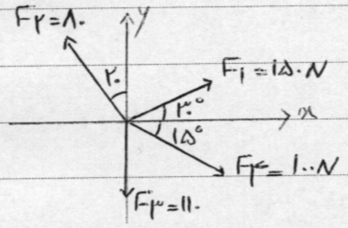
Tamasha

Date : / / 5

$|F_{xy}| = |F| \cdot \cos\theta$

$|F_{xy}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow \vec{F_{xy}} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$

مثال: مطلوبست محاسبه برآیند چهار نیروی نشان داده شده در شکل زیر با استفاده از روش جمع مولفه های برداری!



$F_{1x} = 150 \cdot \cos 30 = 129,9$

$F_{1y} = 150 \cdot \sin 30 = 75$

$F_{2x} = -80 \cdot \sin 20 = -27,4$

$F_{2y} = 80 \cdot \cos 20 = 75,2$

$F_{3x} = 0 \quad , \quad F_{3y} = -110$

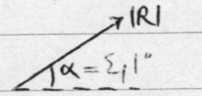
$F_{4x} = 100 \cdot \cos 15 = 96,6$

$F_{4y} = -100 \cdot \sin 15 = -25,9$

$R_x = \Sigma F_x = 129,9 - 27,4 + 0 + 96,6 = 199,1$

$R_y = \Sigma F_y = 75 + 75,2 - 110 - 25,9 = 14,3$

$R = 199,1\vec{i} + 14,3\vec{j} \Rightarrow |R| = \sqrt{14,3^2 + 199,1^2} = 199,6$



$\Rightarrow \alpha = \operatorname{Arctan}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{14,3}{199,1}\right) = 4,1^\circ$

مثال: نیرویی به اندازه 500N با محورهای x و y و z به ترتیب زوایای 60، 45، 120° تشکیل می دهد مولفه های Fx، Fy، Fz این نیرو را تعیین کنید!

$|F| = 500$

$F = F_x i + F_y j + F_z k \Rightarrow \vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda}$

$\alpha = 60 \quad \beta = 45 \quad \gamma = 120$

$\vec{\lambda} = \cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k$

$= \cos 60\, i + \cos 45\, j + \cos 120\, k$

$= 0/5 i + 0/707 j - 0/5 k$

Tamasha

WWW.iransaze.com

$\vec{F} = ۵۰۰\,(۰/۵\,i + ۰/۷۰۷\,j - ۰/۵\,K) = \underbrace{۲۵۰\,i}_{F_x} + \underbrace{۳۵٤\,j}_{F_y} - \underbrace{۲۵۰\,K}_{F_z}$

مثال: اگر مؤلفه های بردار F به شرح زیر معلوم باشد مطلوبست محاسبه زوایای هادی ؟

$\vec{F} = ۲۰\,i - ۳۰\,j + ۶۰\,K$

$|F| = \sqrt{۲۰^۲ + (-۳۰)^۲ + ۶۰^۲} = ۷۰$

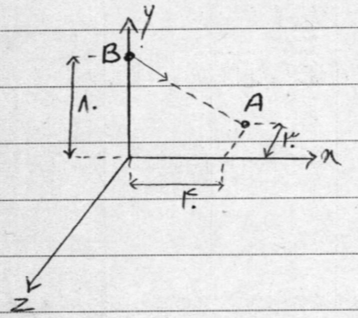
$F_x = |F| \cdot \cos\alpha \Rightarrow ۲۰ = ۷۰ \cos\alpha \quad \cos\alpha = ۲/۷ \quad \alpha = Arccos(۲/۷) = ۷۳/٤$

$F_y = |F| \cdot \cos\beta \Rightarrow -۳۰ = ۷۰ \cos\beta \Rightarrow \beta = Arccos(-۳/۷) = ۱۱۵/٤ = -۶٤/۶$

$F_z = |F| \cdot \cos\gamma \Rightarrow ۶۰ = ۷۰ \cos\gamma \Rightarrow \gamma = Arccos(۶/۷) = ۳۱^\circ$

مثال: در شکل زیر مقدار نیرو N ۲۵۰۰ می باشد بردار نیرو از نقطه B به سمت نقطه A می باشد مطلوبست محاسبه مؤلفه های برداری و زوایای هادی ؟ (۲.۷ ص ۳۰)

A در صفحه zx و B بر روی محور y



$|F| = ۲۵۰۰\,N$

$A(۴۰, ۰, -۳۰) \;,\; B(۰, ۸۰, ۰)$

$\vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda}$

$\vec{\lambda} = \dfrac{\vec{BA}}{|BA|} = \dfrac{٤۰\,i - ۸۰\,j - ۳۰\,K}{\sqrt{۴۰^۲ + ۸۰^۲ + ۳۰^۲}}$

$\vec{\lambda} = \dfrac{٤۰\,i - ۸۰\,j - ۳۰\,K}{۹٤/۳}$

$\vec{F} = \dfrac{۲۵۰۰}{۹۴/۳} \times (٤۰\,i - ۸۰\,j - ۳۰\,K) = ۱۰۶۰\,i - ۲۱۲۰\,j - ۷۹۵\,K$

$\cos\alpha = \dfrac{F_x}{|F|} = \dfrac{۱۰۶۰}{۲۵۰۰} \Rightarrow \alpha = Arccos\left(\dfrac{۱۰۶۰}{۲۵۰۰}\right) = ۶٤/۹$

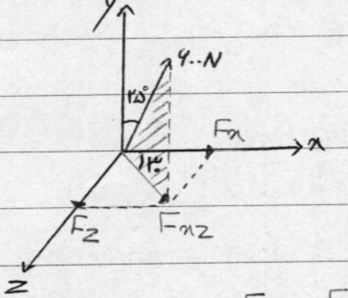
$\cos\beta = \dfrac{F_y}{|F|} = \dfrac{-۲۱۲۰}{۲۵۰۰} \Rightarrow \alpha = Arccos\left(\dfrac{-۲۱۲۰}{۲۵۰۰}\right) = ۱۴۸^\circ$

Date : / /

$\cos\gamma = \frac{F_z}{|F|} = \frac{-795}{2500} \Rightarrow \alpha = 108.5°$

تمرین: در مثال قبل مطلوبست محاسبه مؤلفه های بردار و زوایای بردار بر روی سه صفحه xy و xz و yz ؟

مثال: برای نیروی ۶۰۰ نیوتنی نشان داده شده در شکل مطلوبست محاسبه مؤلفه ها در راستای سه محور اصلی و زوایای هادی ؟ (۲_۷۱ ص ۳۲)



$F_y = 600 \cos 25° = 543.8\ N$

F_y: تصویر 600N روی محور y

زاویه نیرو با صفحه xz ← $90 - 25 = 65°$

$F_{xz} = 600 \cos 65 = 253.6$ یا $(F \sin 25°)$

$F_x = F_{xz} \cos 30 = 253.6 \cos 30 = 219.6$

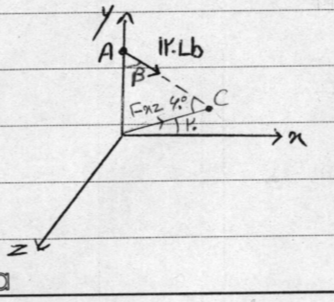
$F_z = F_{xz} \sin 30 = 253.6 \sin 30 = 126.8$

$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{219.6}{600} = 0.366 \Rightarrow \alpha = \arccos(0.366) = 68.53$

$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{126.8}{600} = 0.21 \Rightarrow \gamma = 77.87°$

$\beta = 25°$

مثال: راستای نیروی نشان داده شده در شکل زیر از نقطه C در صفحه xz عبور می کند مطلوبست محاسبه مؤلفه های این نیرو و زوایای هادی ؟ (۲_۷۳ ص ۳۲)



$\beta = 90 - 60 = 30$

$F_y = -120 \cos 30 = -103.9$

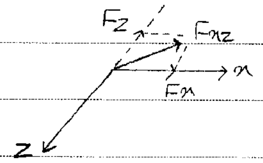
$F_{xz} = 120 \sin 30 = 60\ Lb$

$F_x = 60 \cos 20 = 56.4$

$F_z = -60 \sin 20 = -20.5$

Tamasha

WWW.iransaze.com



$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{56.4}{120} = 0.47$$

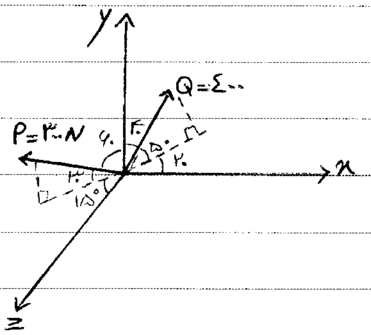
$$\alpha = \mathrm{Arccos}(0.47) = 61.96$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{-20.5}{120} = -0.17 \Rightarrow \gamma = 99.8$$

مثال: اندازه و جهت برآیند دو نیروی نشان داده شده در شکل را تعیین کنید. (۲-۹۲)

بردار 400 N با صفحه xz زاویه ۵۰ درجه می‌سازد

بردار 300 N با صفحه xz زاویه ۳۰ درجه می‌سازد



$$P = P_x i + P_y j + P_z K$$

$$P_y = 300 \cos 60 = 150$$

$$P_{xz} = 300 \cos 30 = 259.8$$

$$P_x = -259.8 \sin 15 = -67.24$$

$$P_z = 259.8 \cos 15 = 250.95 N$$

$$Q = Q_x i + Q_y j + Q_z K$$

$$Q_y = 400 \cos 40 = 306.4 \qquad Q_{xz} = 400 \cos 50 = 257.1$$

$$Q_x = 257.1 \cos 20 = 241.6 \qquad Q_z = -257.1 \sin 20 = -87.93$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (-67.24 + 241.6)\vec{i} + (150 + 306.4)\vec{j} + (250.95 - 87.93)\vec{K}$$

$$\vec{R} = 174.36\vec{i} + 456.4\vec{j} + 163.02\vec{K}$$

$$|R| = \sqrt{(174.36)^2 + (456.4)^2 + (163.02)^2} = 515 N$$

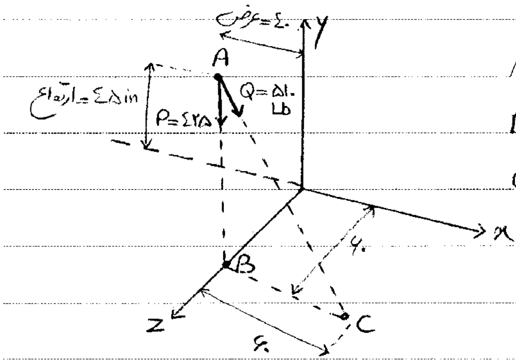
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{R_x}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{174.36}{515}\right) = 70.21$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{R_y}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{456.4}{515}\right) = 27.6$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{R_z}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{163.02}{515}\right) = 71.54^\circ$$

Tamasha

مثال : در شکل زیر مطلوبست محاسبه برآیند دو بردار نیروی اعمال شده به نقطه A ؟ (۲-۹۴)



A در صفحه xy

B, C در صفحه xz

$A(-40, 45, 0)$

$B(0, 0, 60)$

$C(60, 0, 60)$

$$\vec{P} = |P| \cdot \lambda_P = |P| \cdot \frac{\vec{AB}}{|AB|}$$

$$= 425 \times \frac{40i - 45j + 60k}{\sqrt{40^2 + 45^2 + 60^2}}$$

$$= \frac{425}{85} \times (40i - 45j + 60k)$$

$$= 200i - 225j + 300k$$

$$\vec{Q} = |Q| \cdot \lambda_Q = |Q| \cdot \frac{\vec{AC}}{|AC|} = 510 \times \frac{100i - 45j + 60k}{\sqrt{100^2 + (45)^2 + 60^2}}$$

$$= \frac{510}{125} \times (100i - 45j + 60k) = 408i - 183.6j - 244.8k$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (200 + 408)i + (-225 - 183.6)j + (300 + 244.8)k$$

$$= 608i - 408.6j + 544.8k$$

تعادل ذره :

برای آنکه یک ذره دارای تعادل باشد باید برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد در مسائل تعادل ذره ابتدا دیاگرام آزاد ذره را رسم می کنیم ، دیاگرام آزاد ذره شامل تمامی نیروهای معلوم و مجهول وارد بر ذره است سپس برآیند بردارهای نیروی وارده بر ذره را به گونه ای محاسبه می کنیم که برابر صفر شود برای این منظور می توان از روش های مختلف جمع برداری کمک گرفت به طور مثال اگر از روش ترسیمی استفاده می کنیم بردارها را باید به صورت پی در پی به گونه ای رسم کنیم که انتهای آخرین بردار بر ابتدای اولین بردار منطبق شود . اگر

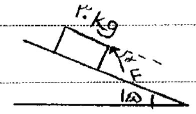
Tamasha

از روش جمع مولفه ها استفاده می کنیم باید از سه معادله تعادل زیر کمک بگیریم

$\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma F_z = 0$

مثال: مطلوبست تعیین اندازه و جهت کوچکترین نیروی F که جسم نشان داده شده در شکل را در حالت تعادل نگه دارد؟ سطح شیب دار فاقد اصطکاک می باشد

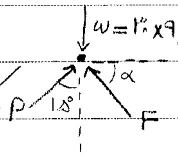
(۲-۵) ص ۲۲



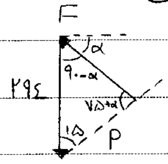
جسم به عنوان یک ذره در نظر گرفته می شود

دیاگرام آزاد جسم را رسم می کنیم

$w = 30 \times 9{,}8 = 294$



برآیند سه نیرو باید صفر شود برای این منظور در اینجا با توجه به آنکه تنها سه بردار داریم از روش مثلث استفاده می کنیم



با توجه به نامشخص بودن راستای F از مثلث نیروها ضلع سوم مثلث که نشان دهنده نیروی F است بی نهایت شکل قابل ترسیم است اما با توجه به آنکه کم ترین مقدار نیروی F مورد نظر است این ضلع باید به گونه ای رسم شود که کم ترین طول را داشته باشد، کم ترین طول وقتی رخ می دهد که راستای F بر P عمود باشد

حالا از قانون سینوس ها کمک می گیریم

$75 + \alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 15°$

$90 - \alpha = 75°$

$$\frac{294}{\sin 90} = \frac{F}{\sin 15} \Rightarrow F = \frac{294 \sin 15}{1} = 76{,}1$$

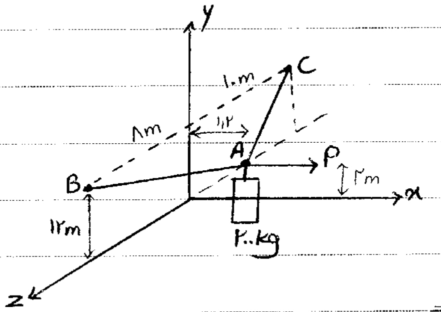
مثال: استوانه ای 200 kg از دو کابل AB و AC آویزان است نیروی افقی P عمود بر صفحه yz در امتداد محور x استوانه را نگه می دارد مطلوبست اندازه نیروی P و کشش در هر کابل؟ (کابل ها در صفحه yz قرار ندارند) (۲-۵۹ ص ۳۵)

A(1.2, 2, 0) — B و C در صفحه yz

B(0, 12, 8) — A در صفحه xy

C(0, 12, −10)

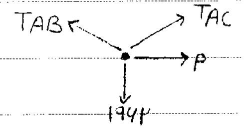
WWW.iransaze.com



$W = ۲۰۰ \times ۹٫۸۱ = ۱۹۶۲\ N$

$\vec{W} = -۱۹۶۲\,\vec{j}$

دیاگرام آزاد نقطه A را رسم می‌کنیم



$\Rightarrow \vec{P} = P\,i$

$\vec{T}_{AC} = |T_{AC}| \cdot \lambda_{AC}$

$= |T_{AC}| \times \dfrac{\vec{AC}}{|AC|} = |T_{AC}| \times \dfrac{-۱٫۲i + ۱۰j - ۱۰k}{\sqrt{۱٫۲^۲ + ۱۰^۲ + ۱۰^۲}}$

$= |T_{AC}| \times \dfrac{-۱٫۲i + ۱۰j - ۱۰k}{۱۴٫۱۹۳}$

$\Rightarrow \vec{T}_{AC} = |T_{AC}| \times (-۰٫۰۸۴۵۵i + ۰٫۷۰۴۶j - ۰٫۷۰۴۶k)$

$\vec{T}_{AB} = |T_{AB}| \times \dfrac{\vec{AB}}{|AB|} = |T_{AB}| \times \dfrac{-۱٫۲i + ۱۰j + ۸k}{\sqrt{۱٫۲^۲ + ۱۰^۲ + ۸^۲}} = |T_{AB}| \times \dfrac{-۱٫۲i + ۱۰j + ۸k}{۱۲٫۸۶۲}$

$= |T_{AB}| \times (-۰٫۰۹۳۳i + ۰٫۷۷۷۵j + ۰٫۶۲۲k)$

حال سه معادله تعادل را برای نیرو می‌نویسیم

$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow P - ۰٫۰۸۴۵۵\,T_{AC} - ۰٫۰۹۳۳\,T_{AB} = ۰$ (۱)

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow -۱۹۶۲ + ۰٫۷۰۴۶\,T_{AC} + ۰٫۷۷۷۵\,T_{AB} = ۰$ (۲)

$\Sigma F_z = ۰ \Rightarrow -۰٫۷۰۴۶\,T_{AC} + ۰٫۶۲۲\,T_{AB} = ۰$ (۳)

(۳) $\Rightarrow T_{AB} = \dfrac{۰٫۷۰۴۶}{۰٫۶۲۲}\,T_{AC} = ۱٫۱۳\,T_{AC}$ (۴)

(۴),(۲) $\Rightarrow -۱۹۶۲ + ۰٫۷۰۴۶\,T_{AC} + ۰٫۷۷۷۵\,(۱٫۱۳\,T_{AC}) = ۰$

$\Rightarrow -۱۹۶۲ + ۱٫۵۸\,T_{AC} = ۰ \Rightarrow T_{AC} = ۱۲۴۲\ N$ (۵)

(۵),(۴) $\Rightarrow T_{AB} = ۱٫۱۳ \times ۱۲۴۲ = ۱۴۰۳\ N$ (۶)

(۱),(۵),(۶) $\Rightarrow P - ۰٫۰۸۴۵۵ \times ۱۲۴۲ - ۰٫۰۹۳۳ \times ۱۴۰۳ = ۰$

$\Rightarrow P = ۲۳۵٫۹\ N$

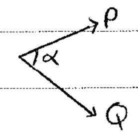
Tamasha

ضرب داخلی و خارجی بردارها:

ضرب داخلی:

ضرب داخلی دو بردار یک عدد می شود و طبق رابطه زیر قابل محاسبه است

$$\vec{P}.\vec{Q} = |P|.|Q|.\cos\alpha$$



$$P = ai + bj + ck \qquad Q = di + ej + Fk \Rightarrow \vec{P}.\vec{Q} = ad + be + cF$$

ضرب داخلی دارای خاصیت جابجایی می باشد $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$

ضرب داخلی دو بردار وقتی ماکزیمم است که دو بردار موازی هم باشند
وقتی دو بردار عمود برهم باشند ضرب داخلی آن ها صفر است

ضرب خارجی:

ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر صفحه ای که دو بردار ضرب شونده با هم تشکیل می دهند

$$\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} \Rightarrow |R| = |P| \times |Q| \times \sin\alpha$$

ضرب خارجی خاصیت جابجایی ندارد $P \times Q = -Q \times P$

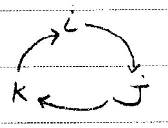
برای تعیین جهت بردار نتیجه از قانون دست راست کمک می گیریم به گونه ای که انگشت شصت در راستای بردار اول و انگشت اشاره در راستای بردار دوم قرار گیرد حال انگشت وسط نشان دهنده جهت بردار نتیجه خواهد بود

$$P \times Q = (ai + bj + ck) \times (di + ej + fk)$$
$$= (ae)k - (af)j - (bd)k + (bf)i + (cd)j - (ce)i$$

$i \times i = 0 \quad j \times j = 0 \quad k \times k = 0$

$i \times j = k \quad j \times i = -k \quad j \times k = i$

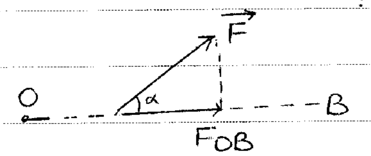
$k \times j = -i \quad i \times k = -j \quad k \times i = j$



Tamasha

$$\vec{R} = P \times Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

محاسبه تصویر یک بردار بر روی یک راستای خاص:



$$|F_{OB}| = |F| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{F}_{OB} = |F_{OB}| \cdot \lambda_{OB} = |F_{OB}| \times \frac{\vec{OB}}{|OB|}$$

اگر زاویه α موجود نباشد از ضرب داخلی برای محاسبه این زاویه کمک می گیریم

$$\vec{OB} \cdot \vec{F} = |OB| \cdot |F| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{F}}{|OB| \cdot |F|} = \vec{\lambda}_{OB} \cdot \vec{\lambda}_F$$

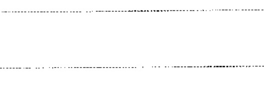
$$(F_{OB} = F \cdot \lambda_{OB})$$

گشتاور:

کمیتی است برداری که تمایل به چرخاندن جسم حول نقطه یا محوری خاص را دارد. گشتاور با توجه به جهت چرخشی که ایجاد می کند می تواند به صورت ساعتگرد یا پادساعتگرد تعریف شود. به طور قراردادی گشتاور پادساعتگرد مثبت و ساعتگرد منفی فرض می شود

گشتاور یک نیرو حول نقطه ای خاص:

برای محاسبه گشتاور یک نیرو حول یک نقطه، از آن نقطه به نقطه ای دلخواه در راستای نیرو، بردار $\vec{r}$ را رسم می کنیم. ابتدای این بردار نقطه مورد نظر و انتهای آن بر راستای نیرو قرار می گیرد. ضرب خارجی بردار $\vec{r}$ در بردار نیرو برابر بردار گشتاور خواهد شد



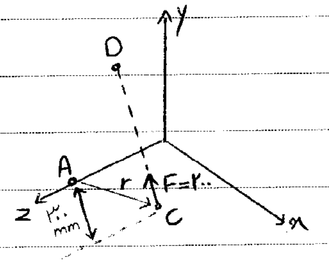
$$M_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

Date : / /

برای تشخیص جهت بردار گشتاور همانند حالت گفته شده در ضرب خارجی بردارها می‌توان از قانون دست راست کمک گرفت

برای تشخیص بردار گشتاور به شکل زیر نیز می‌توان از دست راست کمک گرفت. در این حالت ابتدا باید تشخیص دهیم که گشتاور ساعتگرد است یا پادساعتگرد آنگاه دست راست را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که چهار انگشت در جهت چرخش گشتاور باشد. در این حالت انگشت شصت نشان دهنده جهت بردار گشتاور خواهد بود

مثال: در شکل زیر به نقطه C نیروی $200N$ اعمال می‌شود راستای این نیرو از نقطه d عبور می‌کند مطلوبست محاسبه گشتاور این نیرو حول نقطه A ؟ (۳-۴ص۵۱)



C در صفحه xz

D در صفحه yz

A بر روی محور z

$C(300, 0, 400)$

$A(0, 0, 320)$

$D(0, 240, 80)$

در ابتدا نیروی داده را به صورت یک بردار نیرو می‌نویسیم

$$\vec{F} = |F| \times \frac{\vec{CD}}{|CD|} = 200 \times \frac{-300i + 240j - 320k}{\sqrt{300^2 + 240^2 + 320^2}} = 200 \times \frac{-300i + 240j - 320k}{500}$$

$$= -120i + 96j - 128k$$

حالا بردار $\vec{r}$ را رسم می‌کنیم. ابتدای $\vec{r}$ روی نقطه A قرار می‌گیرد و انتهای آن هر نقطه‌ای دلخواه در راستای نیروی $\vec{F}$. بطور مثال انتها را می‌توان بر روی یکی از دو نقطه C, D اختیار کرد در اینجا از نقطه C کمک می‌گیریم

$$\vec{r} = \vec{AC} = 300i + 80k$$

$$\vec{M_A} = \vec{r} \times \vec{F} = (300i + 80k) \times (-120i + 96j - 128k)$$

$$= (300 \times 96)\vec{k} + (300 \times 128)j - (80 \times 120)j - (80 \times 96)i =$$

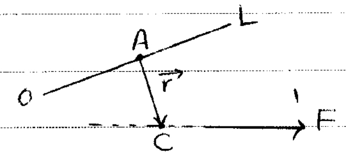
Tamasha

$-7680\,\vec{i} + 28800\,\vec{j} + 28800\,\vec{k}$ N.mm

$|M_A| = \sqrt{7680^2 + 28800^2 + 28800^2} = 41447$ N.mm $= 41{,}447$ N.m

گشتاور یک نیرو حول محوری مفروض:

گشتاور یک نیرو حول یک محور برابر یک عدد می‌شود در این حالت بردار گشتاور به موازات همان محور مورد نظر است برای محاسبه بزرگی بردار گشتاور نقطه‌ای دلخواه بر محور مورد نظر را انتخاب می‌کنیم و سپس گشتاور نیرو حول آن نقطه دلخواه را مطابق روش گفته شده در قسمت قبل محاسبه می‌کنیم در انتها بردار گشتاور بدست آمده را در بردار یکه محور مورد نظر ضرب داخلی می‌کنیم



$$\vec{M_A} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M_{OL}} = \vec{\lambda_{OL}} \cdot \vec{M_A} = \vec{\lambda_{OL}} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

نکته: اگر راستای نیرو و راستای محور با هم متقاطع باشند گشتاوری ایجاد نمی‌شود

مثال: در مثال قبل مطلوبست محاسبه گشتاور حول محور $\vec{AB}$؟ $B(100,0,0)$

$$\vec{\lambda_{AB}} = \frac{\vec{AB}}{|AB|} = \frac{100\,i - 320\,k}{\sqrt{100^2 + 320^2}} = 0.3\,i - 0.96\,k$$

$M_{AB} = \lambda_{AB} \cdot (M_A)$ لازم است که گشتاور نیروی وارده حول نقطه دلخواه در راستای AB محاسبه شود که در مثال قبلی این کار برای نقطه A انجام شده و می‌توان از آن استفاده کرد

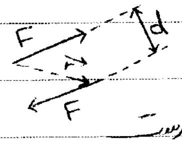
$$M_{AB} = (0.3\,i - 0.96\,k) \cdot (-7680\,i + 28800\,j + 28800\,k)$$

$= 0.3(-7680) - 0.96 \times 28800 = -29952$ N.mm

منفی بودن علامت نشانه آنست که گشتاور حول محور مورد نظر ساعتگرد است

WWW.iransaze.com

کوپل نیرو:



دو نیروی مساوی، موازی و غیر هم جهت را کوپل می‌گویند
گشتاور یک کوپل نیرو حول هر نقطه دلخواه در صفحه مقداری ثابت است
و مقدار آن برابر حاصل ضرب مقدار نیرو در فاصله عمودی دو نیرو است $M = F.d$
و با اینکه می‌توان بر راستای یکی از دو نیرو نقطه ای را انتخاب کرد و همچنین به طور مشابه
بر راستای نیروی دوم نیز نقطه ای انتخاب کرد و با وصل این دو نقطه به هم بردار $\vec{r}$ را تشکیل
داد، ضرب خارجی بردار $\vec{r}$ x بردار نیرو تشکیل بردار گشتاور را می‌دهد $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
(بردار F، برداری است که ابتدای بردار $\vec{r}$ بر روی آن قرار گیرد)

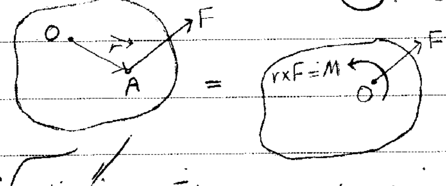
کوپل های هم ارز:

دو کوپل با هم هم ارزند وقتی که بردارهای گشتاوری که ایجاد می‌کنند با هم یکسان باشند

جمع کردن کوپل ها:

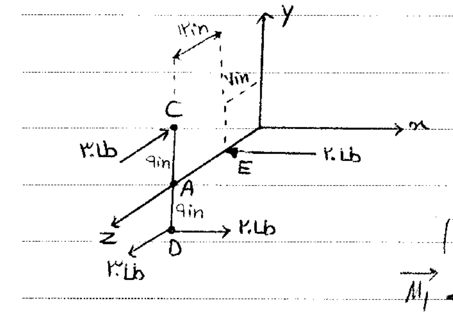
با توجه به اینکه هر کوپل می‌تواند با یک بردار گشتاور نمایش داده شود کوپل ها را می‌توان طبق قوانین
جمع برداری با هم جمع کرد

تجزیه نیروی مفروض به یک نیرو در نقطه O و یک کوپل:



به همین شکل اگر بیش از یک
نیرو به جسم وارد شود همه نیروها را می‌توان
با یک نیرو و یک گشتاور در نقطه مورد نظر
جایگزین کرد به گونه ای که یک نیرو برابر برآیند نیروهای وارد بر جسم می‌باشد و بردار گشتاور نیز برابر
گشتاوری است که نیروهای وارد بر جسم حول نقطه مورد نظر ایجاد می‌کند

مثال: مطلوبست محاسبه برآیند دو کوپل خالص وارده شده در شکل زیر؟ (۳-۶۲ ص ۷۱)



$\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2}$

$\vec{M_1}$: ناشی از دو نیروی ۲۰Lb

$\vec{M_2}$: 〃 〃 〃 ۳۰Lb

برای بردار M_1، بردار $\vec{r}$ را از نقطه E تا نقطه D در نظر می‌گیریم

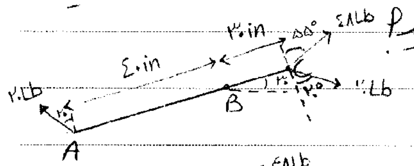
$\vec{M_1} = (-9j + 12k) \times 20i = 180k + 240j$

برای بردار M_2 ابتدای بردار $\vec{r}$ را بر روی نقطه C و انتهای آن را بر D فرض می‌کنیم

$\vec{M_2} = -18j \times 30k = -540i$

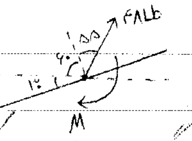
$\Rightarrow \vec{M_1} + \vec{M_2} = -540i + 240j + 180k$

مثال: در شکل زیر: الف) سه نیروی نشان داده را با سیستم نیرو-کوپل معادل در نقطه B جایگزین کنید؟ ب) نیروی حاصل از سیستم نیرو-کوپل بدست آمده در قسمت الف را تعیین کنید و نقطه اثر آن را روی راستای ABC مشخص کنید؟



دو نیروی ۲۰Lb تشکیل یک کوپل می‌دهند

با توجه به اینکه دو نیروی ۲۰Lb مساوی و خلاف جهت هستند همدیگر را خنثی می‌کنند در نتیجه نیرو در نقطه B همان نیروی ۴۸Lb است



گشتاور M در واقع [illegible] است یکی ناشی از کوپل دو نیروی ۲۰Lb و دیگری ناشی از گشتاور نیروی ۴۸Lb حول نقطه B

$M = M_1 + M_2$

$M_1 = -20 \times 70 \sin(90+20) = -1316 \text{ Lb-in}$

$M_2 = 48 \times 30 \sin(90+55) = 826 \text{ lb-in}$

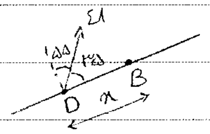
$M = -1316 + 826 = -490 \text{ Lb-in}$

چون منفی بدست آمده است گشتاور ساعتگرد است ←

ب) می‌خواهیم بر راستای AC نقطه‌ای را پیدا کنیم که در آن نقطه فقط یک تک نیرو حاصل شود، آن تک نیرو برابر برآیند نیروهای وارد بر سیستم است. برآیند نیروها در جهت

Date : / /

قبلی برابر $48\,lb$ محاسبه شد



این تک نیرو باید در نقطه‌ای قرار گیرد که گشتاور
ناشی از آن حول نقطه B به صورت x برابر
مقدار محاسبه شده در مرحله قبلی باشد یعنی جهت محل اثر تک نیرو
باید در پایین نقطه B باشد

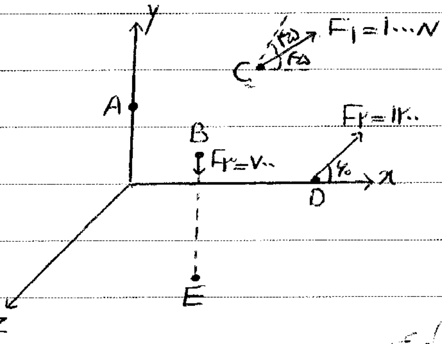
گشتاور نیرو حول نقطه B را محاسبه و با مقدار مرحله قبلی مساوی قرار می‌دهیم

$$-48\,x\sin 35 = -490$$

$$x = \frac{490}{48\sin 35} = 17.8\,in$$

(ص ۷۶ ، ۸۹-۳)

مثال: به جای سه نیروی نشان داده شده در شکل زیر یک سیستم نیرو - کوپل هم ارز در نقطه A قرار دهید؟ (ص ۸۳ ، ۱۰-۳)



D(1000, 0, 0) — ۱۲۰۰N در صفحه xy

A(0, 1000, 0) — ۱۰۰۰N در صفحه به موازات xz

C(750, 1000, -500) — واحد: N.mm

B(750, 1000, 500)

E(1500, -500, 1000)

ابتدا سه بردار نیرو را به صورت برداری درمی‌آوریم

$$\vec{F_1} = F_{1x}i + F_{1z}k = 1000\cos 45\,i - 1000\sin 45\,k = 707i - 707k$$

$$\vec{F_2} = F_{2x}i + F_{2y}j = 1200\cos 60\,i + 1200\sin 60\,j = 600i + 1039j$$

$$\vec{F_3} = |F_3| \cdot \lambda_{\vec{BE}} = 700 \times \frac{\vec{BE}}{|BE|} = 700 \times \frac{75i - 150j + 50k}{\sqrt{75^2+150^2+50^2}} = 300i - 600j + 200k$$

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$
$$= 1607i + 439j - 507k$$

حال برآیند سه بردار فوق را محاسبه می‌کنیم

حال باید گشتاور هر یک از سه نیرو حول نقطه A را محاسبه کرده و با هم جمع کنیم برای این منظور، برای هر نیرو بردار R را از نقطه A تا ابتدای نیرو ترسیم می‌کنیم

Tamasha

$\vec{M_1} = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F_1} = (75i - 50k) \times (707i - 707k)$ $\vec{r}_{C/A} = \vec{AC}$

$= (75 \times 707)j + (50 \times 707)j = 17675\, j$

$\vec{M_2} = \vec{r}_{D/A} \times \vec{F_2} = (100i - 100j) \times (600i + 1039j) = 103900\,k + 60000\,k = 163900\,k$

$\vec{M_3} = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F_3} = (75i + 50k) \times (300i - 600j + 1200k)$

$= (-75 \times 600)k - (75 \times 1200)j + (50 \times 300)j + (50 \times 600)i$

$= 30000\,i - 45000\,k$

$\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2} + \vec{M_3} = (30000\,i + 17675\,j + 118900\,k)\ N.mm$

تعادل اجسام صلب:

جسم صلب، جسمی است که در اثر اعمال نیرو شکل کلی خود را از دست نمی‌دهد و ابعاد و اندازه‌های آن قبل و بعد از اعمال نیرو ثابت است.

روش حل مسائل تعادل اجسام صلب:

همانند مسائل تعادل ذره در اینجا نیز دیاگرام آزاد جسم صلب ترسیم می‌شود و با نوشتن معادلات تعادل مقادیر مجهول محاسبه می‌شود. معادلات تعادل برای مسائل دو بعدی و سه بعدی به شرح زیر است:

دو بعدی:
$\Sigma F_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$
$\Sigma M = 0$

سه بعدی:
$\Sigma F_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$
$\Sigma F_z = 0$
$\Sigma M_x = 0$
$\Sigma M_y = 0$
$\Sigma M_z = 0$

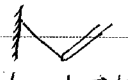
انواع تکیه‌گاه:

۱) تکیه‌گاه غلطکی   ۲) گیرداری

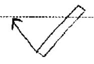
۳) جسم بر روی سطح بدون اصطکاک

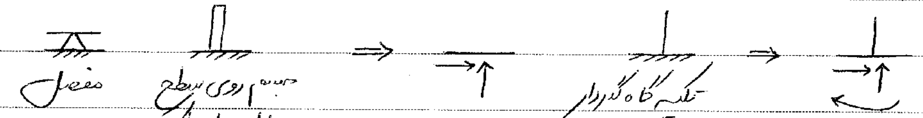
واکنش: نیرو با خط اثر معلوم

WWW.iransaze.com

کابل ⟸  مثلاً ⟸

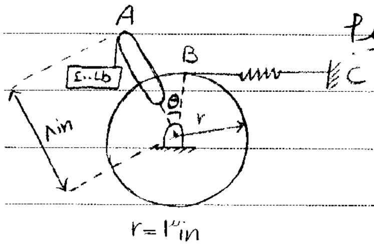
⟸ نیروی داخلی اتصال لزوماً به موازات کابل یا میله

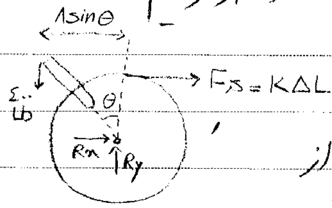




مثال: در میله‌ای به وزن ۴۰۰ پوند به نقطه A از اهرم نشان داده شده در شکل متصل است. ثابت فنر BC عبارت است از $K = 250\ Lb/in$ و وقتی θ مساوی صفر است فنر کشیده نشده. وضعیت تعادل این سیستم را تعیین کنید؟

نمودار آزاد اهرم و استوانه را ترسیم می‌کنیم





ΔL برابر طول قوسی از دایره با زاویه θ می‌باشد

$\Delta L = r\theta = 3\theta$

θ بر حسب رادیان

$\curvearrowleft \Sigma M_o = 0 \Rightarrow 400 \times 8 \sin\theta - (250 \times 3\theta) \times 3 = 0$

$\Rightarrow 3200 \sin\theta = 2250\,\theta$

$\sin\theta = 0.703\,\theta$

معادله بالا را به روش سعی و خطا حل می‌کنیم

$\theta = 0$ جواب اول

$0 < \theta < \pi/2$

هرگاه حاصل کسر به عدد یک نزدیک شد عدد فرض شده می‌تواند جواب مسأله باشد

$\theta = 0.5 \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{0.703\theta} = 1.36$

$\theta = 1 \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{0.703\theta} = 1.2$

$\theta = 1.5 \Rightarrow 0.95$

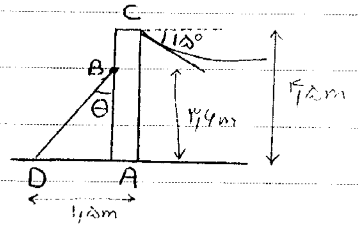
$\theta = 1.4 \Rightarrow 1.001 \Rightarrow \theta = 1.4\ Rad = 80.25^\circ$

(۴-۱۵ ص ۱۰۶)

نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک کارشناسی مهندس احمدرضا جعفری، دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

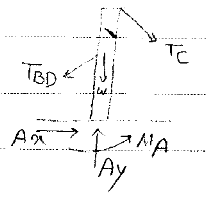
WWW.iransaze.com

مثال: تیر برق به جرم 175 kg مفروض است. سیم برق در نقطه C به آن تکیه دارد. کشش در سیم 600 N است و سیم در نقطه C با افق زاویه 15 درجه دارد. مطلوب است تعیین کوچکترین و بزرگترین کشش مجاز در کابل BD به طوری که اندازه کوپل وارد در نقطه A از 500 N.m تجاوز نکند؟ (۴-۲۳ صفحه ۱۱۳)



دیاگرام آزاد تیر برق را رسم می‌کنیم

دیاگرام



$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{1.5}{3.6}\right) = 22.6$

$M_A \leqslant 500 \ N.m$

$W = 175 \times 9.81 = 1717 \ N$

$\curvearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + T_{BD} \times 3.6 \times \sin 22.6 - T_C \times 4.5 \cos 15 = 0$

$M_A + 1.38 \, T_{BD} - 4.34 \, T_C = 0$

$M_A = 4.34 \, T_C - 1.38 \, T_{BD} = 4.34 \times 600 - 1.38 \, T_{BD}$

$M_A = 2604 - 1.38 \, T_{BD} \Rightarrow T_{BD} = \frac{2604 - M_A}{1.38} = \frac{2604 - 500}{1.38}$

$\Rightarrow T_{BD} = 1525 \ N = T_{min}$

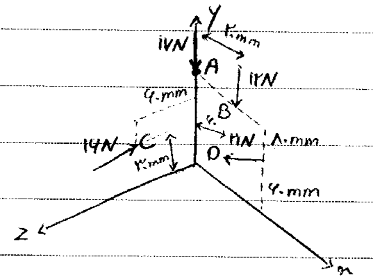
در صورت سوال مشخص نشده است که کوپل A ساعتگرد است یا پادساعتگرد، پس باید هر دو حالت را برای آن فرض کنیم. در اینجا ابتدا اول فرض شد که این گشتاور پادساعتگرد است. یک بار دیگر مسئله را برای حالتی حل می‌کنیم که گشتاور ساعتگرد است. کافیست که در معادله اگر به جای M_A، 500- قرار دهیم

$M_A = -500$

$\Rightarrow T_{BD} = \frac{2604 - (-500)}{1.38} = 2250 \ N = T_{max}$

مثال: برآیند نیروهای داده شده در شکل را یک سیستم نیرو-کوپل در نقطه C قرار دهید؟

WWW.iransaze.com



A(۰,۱۴۰,۰) D,B در صفحه xy

B(۲۰,۱۴۰,۰) C در صفحه yz

C(۰,۳۰,۶۰)

D(۶۰,۶۰,۰)

ابتدا برآیند نیروها را بدست می‌آوریم

$$\vec{R} = -17j - 12j - 21i - 14k$$

$$\vec{R} = -21i - 29j - 14k$$

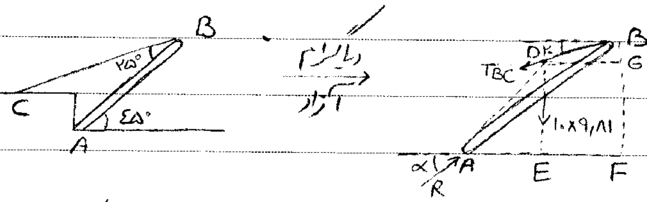
حال گشتاور این چهار نیرو را نسبت به نقطهٔ C محاسبه می‌کنیم. گشتاور نیروی ۱۴N صفر است

$$\vec{M}_C = r_{A/C} \times (-17j) + r_{B/C} \times (-12j) + r_{D/C} \times (-21i)$$

$$= (110j - 60k)(-17j) + (20i + 110j - 60k)(-12j) + (60i + 30j - 60k)(-21i)$$

$$= -1020i - 240k - 720i + 630k + 1260j = -1740i + 1260j + 390k \quad N.mm$$

مثال: در شکل روبرو وزن قطعه AB، ۱۰kg و طول آن ۴m است. این قطعه با طناب BC نگه داری شده است. مطلوبست تعیین کشش طناب و واکنش نقطهٔ A ؟ (۴-۶ ص ۱۱۵)



قطعه AB یک جسم سه نیرویی است. شرط تعادل جسم سه نیرویی آنست که برآیند نیروها صفر شود و راستای سه نیرو نیز از یک نقطه عبور کند

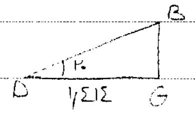
مثلث متساوی الساقین $AF = BF = AB \cos 45$

$= 4 \cos 45 = 2{,}828\ m$

$DG = EF = \frac{AF}{2} = 1{,}414$

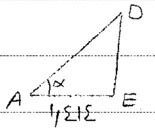
Tamasha

WWW.iransaze.com



$\tan 20 = \frac{BG}{1.414} \Rightarrow BG = 1.414 \tan 20 = 0.515\, m$

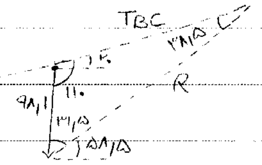
$\overset{\triangle}{ADE}$:



$DE = BF - BG = 2.828 - 0.515 = 2.313$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2.313}{1.414}\right) = 58.5^\circ$

با بدست آوردن زاویه α مثلث نیروها را رسم می‌کنیم، برای این منظور بردارهای نیرو را بصورت متوالی رسم می‌کنیم

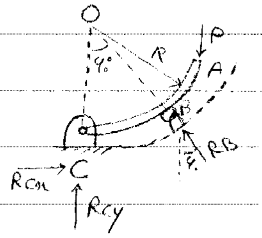


$\frac{98.1}{\sin 38.5} = \frac{T_{BC}}{31.5} = \frac{R}{\sin 110}$

$T_{BC} = \frac{98.1 \sin 31.5}{\sin 38.5} = 82.33\, N$

$R = \frac{98.1 \sin 110}{\sin 38.5} = 148\, N$

مثال: در شکل زیر مطلوبست تعیین واکنش در نقطه B و C ‏(۴-۸۲ ص ۱۱۸)



CBA : کمان دایره

تکیه‌گاه B غلطکی و دارای یک واکنش در راستای مرکز دایره

تکیه‌گاه C مفصلی و دارای دو واکنش است

برای گرفتن گشتاور R_B با توجه به آنکه راستای نیرو از مرکز دایره عبور می‌کند نیرو را در فاصله مرکز دایره تا نقطه C (شعاع دایره) و sin زاویه راستای نیرو و راستای خط رابط ضرب می‌کنیم

$\curvearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow -P.R + R_B.R.\sin 60 = 0$

$\Rightarrow R_B = \frac{P.R}{R \sin 60} = \frac{P}{\sin 60} = 1.15P$

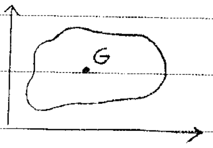
$\overrightarrow{\sum F_x} = 0 \Rightarrow R_{Cx} - (1.15P)\sin 60 = 0$

$R_{Cx} = P$

نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک کارشناسی مهندس احمدرضا جعفری، دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{cy} - P + 1.15P\cos 60 = 0 \Rightarrow R_{cy} = 0.425P$

مرکز سطح :



$G(\bar{x}, \bar{y})$

Q_x : گشتاور اول سطح شکل حول محور x

Q_y : " " " " " y

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{Q_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{Q_x}{A}$$

اشکالی که دارای مرکز تقارن هستند مرکز سطح آن‌ها روی مرکز تقارنشان می‌باشد

شکل‌هایی که مرکز تقارن ندارند اما محور تقارن دارند مرکز سطح آن‌ها روی این محور تقارن است

مرکز سطح برخی اشکال خاص :

برای برخی اشکال خاص، انتگرال‌های بالا محاسبه شده و مختصات مرکز سطح آن‌ها را بصورت پارامتری بدست آورده که برای این اشکال می‌توان با مراجعه به جداول مختصات مرکز سطح را بدست آورد

محاسبه مرکز سطح برای اشکال مرکب :

برای اشکال مرکب می‌توان آن‌ها را به چند شکل ساده تقسیم نموده و برای هر شکل ساده مساحت و مختصات مرکز سطح را در یک دستگاه مختصات ثابت تعیین کرد سپس با استفاده از روابط زیر می‌توان مختصات مرکز سطح شکل مرکب را تعیین کرد

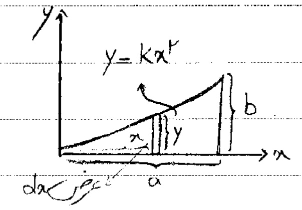
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i}{\sum A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

x_i, y_i : مختصات مرکز سطح شکل iام

A_i : مساحت شکل iام

WWW.iransaze.com

مثال: مطلوبست تعیین مختصات مرکز سطح منحنی سهمی شکل نشان داده شده در شکل زیر. (۵-۱۰۴ ص ۱۴۸)



محاسبه K

به ازای $x=a$ داریم: $y=b$

$$\Rightarrow b=ka^2 \Rightarrow k=\frac{b}{a^2}$$

ابتدا مساحت شکل را با انتگرال گیری محاسبه می کنیم. یک المان عمودی در شکل در نظر می گیریم.

$$A=\int dA=\int y\,dx$$

$$=\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\,dx=\left[\frac{b}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{3}$$

$$Q_y=\int x\,dA=\int_0^a x\times\frac{bx^2}{a^2}\,dx=\int\frac{b}{a^2}x^3\,dx=\left[\frac{bx^4}{4a^2}\right]_0^a=\frac{ba^2}{4}$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{Q_y}{A}=\frac{ba^2/4}{ab/3}=\frac{3a}{4}$$

در انتگرال زیر با توجه به اینکه نقاط المان عمودی y های متفاوتی دارند باید مقدار y در مرکز سطح المان مستطیلی را در نظر گرفت

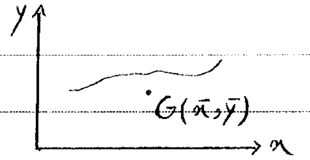
$$Q_x=\int y\,dA=\int_0^a\left[\frac{b}{2a^2}x^2\right]\left[\frac{b}{a^2}x^2\,dx\right]$$

$$=\int_0^a\frac{b^2}{2a^4}x^4\,dx=\left[\frac{b^2}{10a^4}x^5\right]_0^a=\frac{b^2a}{10}$$

$$\left(y/2=\frac{b}{2a^2}x^2\right)$$

$$\Rightarrow \bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{b^2a/10}{ab/3}=\frac{3b}{10}$$

محاسبه مراکز خطوط منحنی ها:



$$\bar{x}=\frac{\int x\,ds}{\int ds}$$

s: طول منحنی

$$\bar{y}=\frac{\int y\,ds}{\int dx}$$

همانند سطح مرکب در منحنی های مرکب نیز می توان از روابط مشابه استفاده کرد

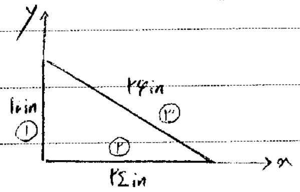
$$\bar{x}=\frac{\sum s_i\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i}$$

$$\bar{y}=\frac{\sum s_i y_i}{\sum s_i}$$

نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک کارشناسی مهندس احمدرضا جعفری، دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

WWW.iransaze.com

مثال: مثلث نشان داده شده در شکل از سیم نازک و همگن ساخته شده مختصات مرکز گرانش آن را تعیین کنید؟ (۵-۲ صفحه ۱۴۱)



یک دستگاه مختصات به صورت اختیاری به گوشه‌ای فرض می‌کنیم که مبدا آن گوشه پایین زاویه قائمه مثلث باشد
مثلث را به سه خط تجزیه می‌کنیم و برای هر خط طول و مختصات مرکز گرانش آن را تعیین می‌کنیم. با توجه به اینکه اضلاع مثلث از سیم همگن ساخته شده مرکز گرانش هر خط در وسط آن قرار می‌گیرد

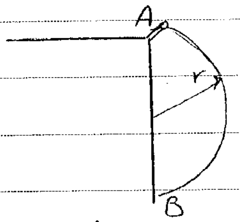
شکل ①: $S_1=10$, $\bar{x}_1=0$, $\bar{y}_1=5$

شکل ②: $S_2=24$ $\bar{x}_2=12$ $\bar{y}_2=0$

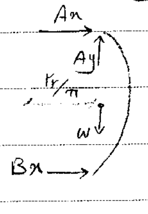
شکل ③: $S_3=26$ $\bar{x}_3=12$ $\bar{y}_3=5$

$$\bar{x}=\frac{\Sigma s_i x_i}{\Sigma s_i}=\frac{10\times0+24\times12+26\times12}{10+24+26}=10\,in \qquad \bar{y}=\frac{10\times5+24\times0+26\times5}{10+24+26}=3\,in$$

مثال: میله‌ای یکنواخت به شکل نیم‌دایره به وزن W و شعاع r به پین A متصل است و به سطح بی‌اصطکاک تکیه دارد. واکنش‌های تکیه‌گاهی A و B را تعیین کنید؟ (۵-۳ صفحه ۱۴۲)



دیاگرام آزاد نیم‌دایره را رسم می‌کنیم
تکیه‌گاه A که یک پین است دو واکنش افقی و عمودی دارد و تکیه‌گاه B که سطح بدون اصطکاک است یک واکنش عمود بر سطح یعنی به صورت افقی دارد
وزن نیم‌دایره به مرکز گرانش آن وارد می‌شود
مرکز گرانش نیم‌دایره توخالی به فاصله $2r/\pi$ از مرکز دایره قرار می‌گیرد



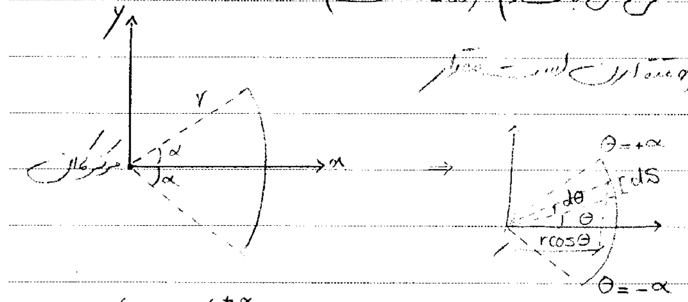
$\uparrow \Sigma F_y=0 \Rightarrow A_y-W=0 \quad A_y=W$

$\curvearrowleft \Sigma M_A=0 \quad -W\times\frac{2r}{\pi}+B_x\times 2r \Rightarrow B_x=\frac{W}{\pi}$

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow \frac{W}{\pi}+A_x=0 \Rightarrow A_x=-W/\pi \quad \overleftarrow{A_x=W/\pi}$

WWW.iransaze.com

مثال: مطلوبست تعیین مختصات مرکز گرانی کمان نمایش داده شده در شکل زیر؟ (کمان بصورت توخالی می باشد) (۵-۵ ص ۱۴۱)



چون شکل نسبت به محور x متقارن است مقدار $\bar{y}$ آن صفر است

$$S=\int ds=\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\,d\theta=\left[r\theta\right]_{-\alpha}^{+\alpha}=\left(r\alpha-(-r\alpha)\right)=2r.\alpha \Rightarrow$$ اندازه زاویه 2α

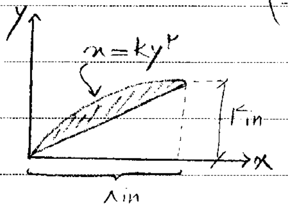
$$\int x\,ds=\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\cos\theta\times(r\,d\theta)=\int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2\cos\theta\,d\theta=r^2\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{+\alpha}=r^2\left[\sin\alpha-(\sin(-\alpha))\right]$$

$$=2r^2\sin\alpha$$

α: بر حسب رادیان

$$\bar{x}=\frac{\int x\,ds}{\int ds}=\frac{2r^2\sin\alpha}{2r.\alpha}=\frac{r.\sin\alpha}{\alpha}$$

مثال: مطلوبست محاسبه مرکز سطح شکل زیر؟ (ص ۱۴۴)



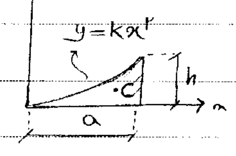
محاسبه K:

$$x=8 \Rightarrow y=4 \Rightarrow 8=k\times 4^2$$

$$k=0.5$$

برای محاسبه مرکز سطح از جدول کمک می گیریم

مطابق جدول برای زیر منحنی سهموی داریم:



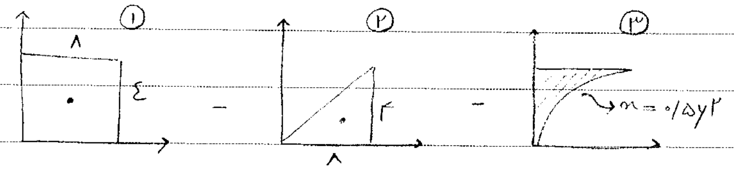
$$A=\frac{ah}{3} \quad \bar{x}=\frac{3}{4}a \quad \bar{y}=\frac{3}{10}h$$

در شکل بالا نسبت به شکل صورت مسئله منحنی سهموی ۹۰ درجه چرخیده است یا به بیان دیگر جای x و y با هم عوض شده است. عبارات شکل بالا مختصات مراکز سطح در زیر خم منحنی است اما در شکل صورت سوال مختصات مرکز سطح در بالای خم منحنی است می توان شکل را بصورت زیر تفکیک کرد:

Tamasha

نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک کارشناسی مهندس احمدرضا جعفری، دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

WWW.iransaze.com



شکل ① : $a_1 = 32 \quad \bar{x}_1 = 4 \quad \bar{y}_1 = 2$

شکل ② : $A_2 = \frac{8\times 4}{2} = 16 \quad \bar{x}_2 = \frac{2}{3}\times 8 = 5.33 \quad \bar{y} = \frac{4}{3} = 1.33$

در مورد مثلث اگر فاصله مرکز سطح از رأس مثلث محاسبه شود از ضریب ۲/۳ و اگر از قاعده مثلث محاسبه شود از ضریب ۱/۳ استفاده می‌کنیم

شکل ③ : $A_3 = \frac{4\times 8}{3} = 10.66$

برای سهمی با توجه به اینکه منحنی برحسب توان دوم y است و نه x (جای x و y عوض شده) مقدار a را برابر طول می‌گیریم و h را برابر طول افقی در نظر می‌گیریم و پس از آن جای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را نیز عوض می‌کنیم ⟸

$\bar{x} = \frac{3}{10}\times 8 = 2.4 \quad \bar{y} = \frac{3}{4}\times 4 = 3$

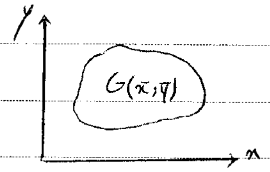
به این نکته نیز توجه شود که روابط بالا به شرط آنست که رأس سهمی بر روی مبدأ مختصات قرار گیرد اگر این امر اتفاق نیفتاد باید به مقادیر بالا مختصات رأس سهمی نیز اضافه می‌شود در اینجا مرکز سهمی بر روی مبدأ قرار گرفته و نیازی به این مسأله نیست

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{(32\times 4) - (16\times 5.33) - (10.66\times 2.4)}{32 - 16 - 10.66} = 3.2\ in$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{(32\times 2) - (16\times 1.33) - (10.66\times 3)}{32 - 16 - 10.66} = 2.01\ in$$

تمرین : مثال قبل را با استفاده از روش انتگرال‌گیری حل کنید!

Tamasha



حجم ناشی از دوران سطح :

اگر یک شکل را حول محور خاص دوران داده شود از دوران سطح یک حجم حاصل می شود. اگر این شکل به صورت یک منحنی باشد از دوران آن یک حجم توخالی بدست می آید. حجم حاصل از دوران سطح حول هر یک از دو محور x و y به شرح زیر محاسبه می شود

x دوران حول محور : $V = A \times (2\pi \bar{y})$

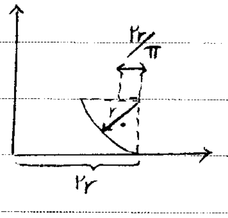
y " " " : $V = A \times (2\pi \bar{x})$

در مورد خطوط و منحنی ها سطح حاصل از شکل بدست آمده به شرح زیر محاسبه می شود:

x دوران حول محور : $A = S \times (2\pi \bar{y})$

y " " " : $A = S \times (2\pi \bar{x})$

مثال: ربع دایره نشان داده شده در شکل زیر را حول محور y دوران داده‌ایم مطلوبست محاسبه سطح حاصل از شکل بدست آمده؟ (۵-۶۰ ص ۱۵۰)



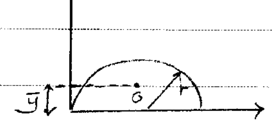
$S = \frac{\pi r}{2}$ (طول) $\quad \bar{x} = 2r - \frac{2r}{\pi} = 2r\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$

$A = 2\pi\bar{x} \times S = 2\pi\left(2r\left(1-\frac{1}{\pi}\right)\right) \times \frac{\pi r}{2} \Rightarrow$

$= 2\pi^2 r^2\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) = 2\pi r^2(\pi - 1)$

مثال: می دانیم که حجم و سطح کره به ترتیب برابرند با $\frac{4}{3}\pi r^3$ و $4\pi r^2$ با استفاده از آن مطلوبست محاسبه مرکز سطح نیم دایره و همچنین مرکز ثقل نیم دایره توخالی؟ (۵-۶۸ ص ۱۵۰)

در صورت دوران نیم دایره توپر حول محور x یک کره بدست می آید



Tamasha

WWW.iransaze.com

توپر

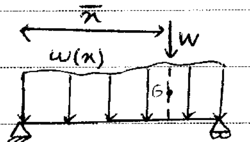
$$V = A \times 2\pi\bar{y} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi r^2}{2} \times 2\pi\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

از دوران نیم دایره توخالی کره توخالی بدست می آید

$$A = S \times 2\pi\bar{y} \Rightarrow 4\pi r^2 = \pi r \times 2\pi\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$$

بارهای گسترده :

اگر یک بار به جای آنکه به صورت متمرکز بر یک نقطه وارد شود بر یک سطح یا خط پخش شود گسترده است



بار گسترده را می توان با یک بار متمرکز جایگزین کرد

مقدار بار متمرکز برابر انتگرال بار گسترده روی سطح یا خط است

$$W = \int_0^L w(x)\,dx$$ که بار متمرکز

اندازه این بار متمرکز برابر مساحت شکلی است که بار گسترده ایجاد می کند

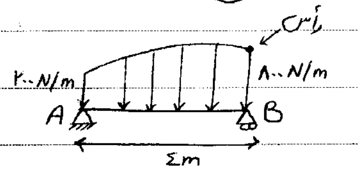
$$\bar{x} = \frac{\int x\,w(x)\,dx}{\int w(x)\,dx}$$

محل اثر بار متمرکز معادل مرکز ثقل شکل بار است

همانند سطوح مرکب در مورد بارهای گسترده مرکب نیز می توان آن را به اجزایی به شکل های ساده تر تقسیم نمود و با جدول هایی مشابه سطوح مرکب مقدار بار متمرکز معادل و محل اثر آن را پیدا کرد

بارهای گسترده شکل های متنوعی می توانند داشته باشند که از جمله می توان به بار گسترده یکنواخت، مثلثی، ذوزنقه ای و سهمی شکل اشاره کرد

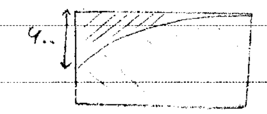
مثال: در تیر شکل زیر بار گسترده را با یک بار متمرکز جایگزین کرده و واکنش های تکیه گاهی را محاسبه نمایید؟



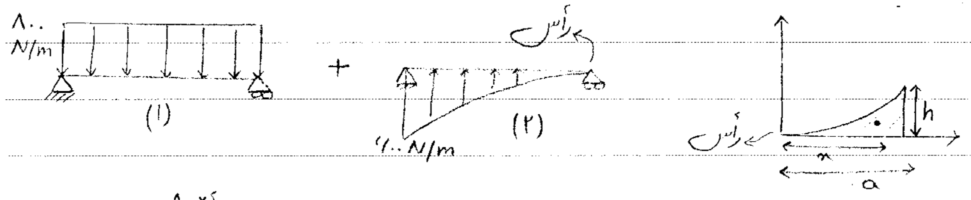
بار گسترده به صورت مرکب است آن را تبدیل به یک بار گسترده یکنواخت که از آن یک بار سهمی شکل کم شده است می نامیم

نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک کارشناسی مهندس احمدرضا جعفری، دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

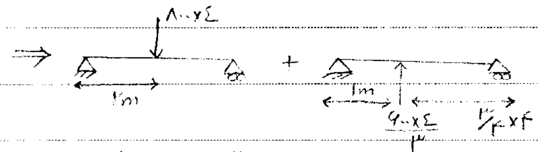
Date :   /   /

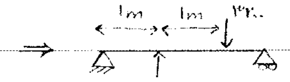


به جای آنکه بار سهمی را کم کنیم، جهت بار را عوض کرده و رو به بالا در نظر می گیریم.

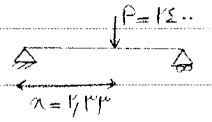


$A = \frac{ah}{3}$ و $\bar{x} = \frac{3a}{4}$





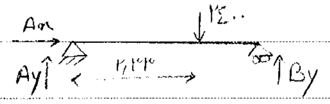
با همین وضعیت نیز می توان واکنش های تکیه گاهی را بدست آورد اما در صورت سوال یک بار تک به عنوان برآیند خواسته شده است.



$P = \sum P_i = 3200 - 800 = 2400$

$\bar{x} = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i} = \frac{-800 \times 1 + 3200 \times 2}{-800 + 3200} = 2.33$

حال دیاگرام آزاد تیر را رسم کرده و با نوشتن معادلات تعادل واکنش های تکیه گاهی را محاسبه می کنیم.



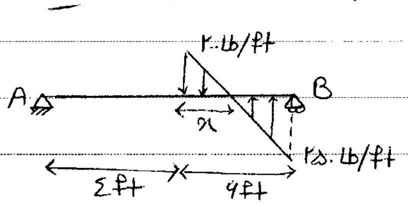
$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \times 4 - 2400 \times 2.33 = 0$

$B_y = 1400$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 2400 + 1400 = 0 \quad A_y = 1000\,N$

مثال: در تیر شکل زیر مطلوبست محاسبه بار متمرکز معادل و مقادیر واکنش های تکیه گاهی؟
(۵-۸۱ ص ۱۵۹)



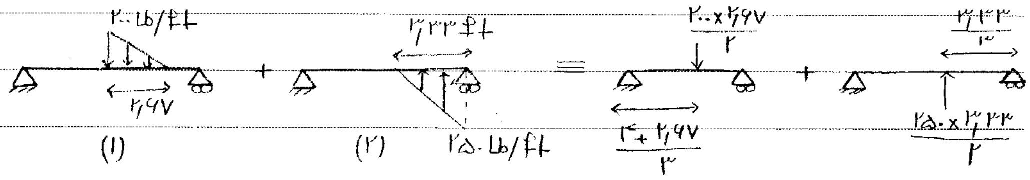
Tamasha

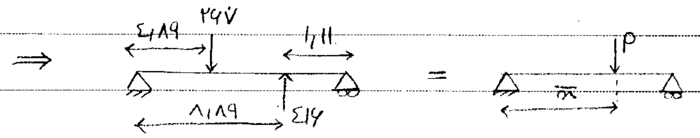
Date : / /

شکل را به دو مثلث تقسیم می‌کنیم، عرض این دو مثلث نامشخص است که می‌توان آن را با استفاده از تشابه دو مثلث بدست آورد

تشابه : $\frac{x}{6-x} = \frac{200}{250} = 0.8 \Rightarrow 0.8(6-x) = x$

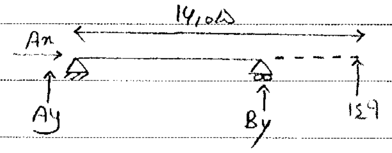
$x = 2.67\ ft$





$P = 267 - 416 = -149\ Lb \Rightarrow P = 149\ Lb \uparrow$

$\bar{x} = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i} = \frac{267 \times 4.89 - 416 \times 8.89}{267 - 416} = 16.05$



$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 149 \times 16.05 + B_y \times 10 = 0$

$B_y = -239.14\ Lb = 239.14 \downarrow$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 239.14 + 149 = 0$

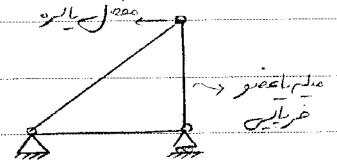
$A_y = 90.14\ Lb \uparrow$

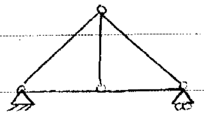
Tamasha

WWW.iransaze.com

خرپاها:

خرپا مجموعه ای از میله هاست که بوسیله مفصل هایی بهم متصل شده اند و ترکیبات مثلثی شکل تشکیل داده اند. از خرپاها معمولاً برای پوشاندن دهانه های بزرگ مانند سوله ها و سالن های صنعتی استفاده می شود. در خرپاها هر کدام از میله ها تنها نیروهای محوری را تحمل کرده و توان تحمل نیروهای برشی و خمشی را ندارند.





n: تعداد اعضا
J: تعداد گره ها
r: تعداد واکنش های تکیه گاهی

شرط لازم برای پایداری خرپا: $n+r \geq 2J$

خرپا معین: $n+r=2J$

خرپا نامعین: $n+r>2J$

درجه نامعینی: $(n+r)-2J$

خرپا ناپایدار: $n+r<2J$

روش های حل مسائل خرپا:

1) روش گره یا مفصل: در این روش مراحل کار به شرح زیر است:

1- با رسم دیاگرام آزاد خرپا و نوشتن معادلات تعادل جسم صلب واکنش های تکیه گاهی را بدست می آوریم.

2- در هر یک از گره های خرپایی به ترتیب دیاگرام آزاد گره را رسم کرده و با نوشتن معادلات تعادل گره نیروهای اعضای متصل به گره را محاسبه می کنیم. در این زمینه لازم است به نکات زیر توجه شود:

- هر عضو خرپایی معادل یک نیروی مجهول با راستای معلوم به موازات عضو می باشد. با توجه به اینکه برای هر گره در حالت دو بعدی تنها دو معادله تعادل وجود دارد و با این دو معادله تنها دو مجهول را می توان محاسبه کرد، در ابتدا باید به سراغ گره هایی برویم

Tamasha

WWW.iransaze.com

که فقط دو عضو به آن ها متصل باشد (در حالت سه بعدی، سه معادله وجود دارد و باید به سراغ گره های با حداکثر سه عضو برویم)

با محاسبه نیروی اعضا از تعداد مجهولات در گره های مجاور نیز کاسته می شود و می توان به سراغ گره های با بیش از دو عضو نیز رفت

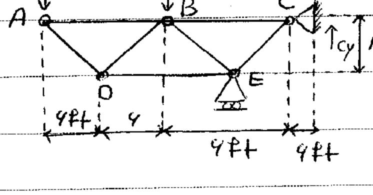
- باید توجه کرد که نیرو در هر عضو مقداری ثابت است. هر عضو خرپایی به دو گره ابتدا و انتهای خود دو نیروی موازی، مساوی اما مختلف الجهت وارد می کند پس اگر بطور مثال نیروی وارد به گره ابتدای عضو بدست آمد در رسم دیاگرام آزاد گره انتها باید همان نیرو را با جهتی مخالف قرار دهیم

جهت نیروی عضو خرپایی را معمولاً با توجه به فشاری یا کششی بودن نیروی عضو نمایش می دهند اگر نیرویی که عضو به گره وارد می کند به سمت خارج عضو باشد عضو در فشار است و اگر این نیرو به سمت خود عضو باشد عضو در کشش است

→ PLC (−) فشاری   ⇒ T، (+) کششی

توجه: نیروی عکس العملی که گره به عضو وارد می کند مساوی و خلاف جهت نیرویی است که عضو به گره وارد می کند. معمولاً در حل مسائل خرپا با نیروی اعمال شده از طرف عضو به گره سروکار داریم

مثال: با استفاده از روش مفصل ها نیروی اعضای خرپای زیر را بدست آورید؟ (۶-۱ ص ۱۸۳)



J=۵ , n=۷ , r=۳

۲×۵ = ۷+۳ → خرپا پایدار

اگر خرپا نامعین شود از روش های استاتیکی قابل حل نیست

Tamasha

WWW.iransaze.com

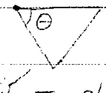
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$

$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0 \Rightarrow 2000 \times 24 + 1000 \times 12 - E_y \times 6 = 0 \Rightarrow E_y = 10000\ Lb$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2000 - 1000 + 10000 + C_y = 0 \Rightarrow C_y = -7000\ Lb$

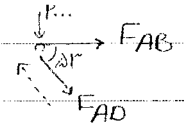
حال باید به سراغ گره‌ها رفته و دیاگرام آزاد آن‌ها را رسم کنیم، برای شروع باید به سراغ گره‌های ۲ عضوی رفت، در اینجا دو گره A و C دو عضوی هستند

گره A :



$\Rightarrow \theta = \text{Arctan}\left(\frac{8}{6}\right) = 53^\circ$

چون نیروی اعضا نامشخص است بطور قراردادی آن‌ها را با جهت کششی رسم می‌کنیم در انتها اگر برای عضو مقدار نیرو مثبت بدست آمد فرض اولیه صحیح است وگرنه جهت نیرو فشاری است



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2000 - F_{AD} \sin 53 = 0$

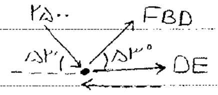
$\Rightarrow F_{AD} = -2500\ Lb$

$\Rightarrow F_{AD} = 2500\ Lb\ (P) \not\equiv (C)$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} - 2500 \cos 53 = 0 \Rightarrow F_{AB} = 1500\ Lb\ (T)$

با محاسبه نیروی عضو AD در گره D دو مجهول وجود خواهد داشت و این گره نیز قابل حل است

در مورد نیروی عضو AD، چون جهت نیرو در گره A به سمت بالا و چپ است در گره D این نیرو برعکس به سمت پایین و راست خواهد بود



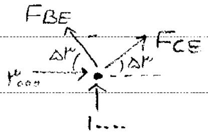
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -2500 \sin 53 + F_{BD} \sin 53 = 0$

$\Rightarrow F_{BD} = 2500\ Lb\ (T)$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 2500 \times \cos 53 + F_{DE} + 2500 \cos 53 = 0$

$\Rightarrow F_{DE} = -3000\ Lb\ (C)$

گره E :



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 3000 - F_{BE} \cos 53 + F_{CE} \cos 53 = 0$

$\Rightarrow 0.6 F_{BE} + 0.6 F_{CE} = -3000$

$F_{CE} - F_{BE} = 5000$ ①

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 10000 + F_{BE} \sin 53 + F_{CE} \sin 53 = 0$

$10000 + 0.8 F_{BE} + 0.8 F_{CE} = 0$ ②

$$10000 + 0.8F_{BE} + 0.8(F_{BE} - 5000) = 0 \Rightarrow 10000 + 1.6F_{BE} - 4000 = 0$$

$$\Rightarrow 1.6F_{BE} = -6000 \Rightarrow F_{BE} = -3750$$

$$\Rightarrow F_{BE} = 3750\ Lb\ (C)$$

مقدار بدست آمده را در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$$F_{CE} = -3750 - 5000 = -8750 \Rightarrow F_{CE} = 8750\ Lb\ (C)$$

گره C:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_{BC} + 8750 \cos 53^\circ = 0$$

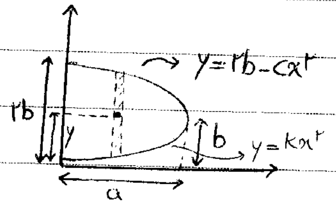
$$\Rightarrow F_{BC} = 5250\ (T)$$

معادله تعادل در راستای محور y را نیز فقط جهت کنترل جواب می‌نویسیم

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -7000 + 8750 \sin 53^\circ = -7000 + 8750 \times 0.8$$

$$-7000 + 7000 = 0 \ \checkmark$$

مثال: مرکز سطح شکل نشان داده شده را با انتگرال گیری مستقیم بدست آورید؟ (۵-۴۷ ص ۲۵۲)



محاسبه K:

$$x = a \Rightarrow y = b$$

$$b = ka^2 \Rightarrow k = \frac{b}{a^2}$$

محاسبه C:

$$x = a \Rightarrow y = b$$

$$b = 2b - ca^2 \Rightarrow -b = -ca^2 \Rightarrow c = \frac{b}{a^2}$$

عرض المان: dx

ارتفاع المان: $(2b - cx^2) - (kx^2) = \left(2b - \frac{b}{a^2}x^2\right) - \left(\frac{b}{a^2}x^2\right)$

$$= 2b - \frac{2b}{a^2}x^2$$

$$dA = dx \left(2b - \frac{2b}{a^2}x^2\right)$$

$$A = \int dA = \int_0^a \left(2b - \frac{2b}{a^2}x^2\right) dx = 2b\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 2b\left[a - \frac{a^3}{3a^2}\right] = \frac{4ab}{3}$$

$$Q_y = \int x\,dA = \int x\left(2b - \frac{2b}{a^2}x^2\right) dx = 2b\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2}\right]_0^a = 2b\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4a^2}\right] = \frac{ba^2}{2}$$

$$Q_x = \int y\,dA = \int y\left(2b - \frac{2b}{a^2}x^2\right) dx$$

در محاسبه Q_x در انتگرال بجای y باید مختصات y مرکز المان قرار داده شود

WWW.iransaze.com

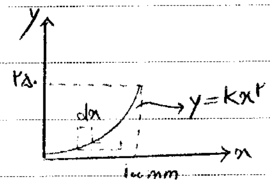
$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left[\frac{b}{a^2}x^2 + \left(2b - \frac{b}{a^2}x^2\right)\right] = b$$

$$\Rightarrow Q_x = \int_0^a b\left(2b - \frac{2b}{a^2}\right)x^2dx = 2b^2\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 2b^2\left[a - \frac{a^3}{3a^2}\right] = \frac{4ab^2}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{ba^2/2}{4ab/3} = \frac{3}{8}a \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{4ab^2/3}{4ab/3} = b$$

مثال: منحنی سهمی شکل نشان داده شده در شکل زیر را به اندازه ۱۸۰° حول محور y دوران می‌دهیم مساحت جانبی شکل فضایی بدست آمده چقدر است؟

محاسبه K:



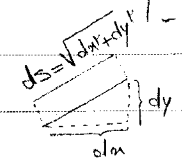
$$x = 100 \Rightarrow y = 250 \Rightarrow 250 = K \times 100^2$$

$$K = 0/025$$

$$\Rightarrow y = 0/025x^2$$

$$A = [2\pi\bar{x} \times S] \times \frac{\pi}{2\pi} = \pi\bar{x}.S$$

چون دوران کامل نیست باید سطح جانبی را با توجه به تناسب بدست آوریم



$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+y'^2} \qquad y' = 0.05x$$

فاکتور

$$S = \int_0^{100}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^{100}\sqrt{1+0.0025x^2}\,dx = 212/01$$

$$\int\sqrt{a^2+u^2}\,dx$$

$$u = a\tan t \Rightarrow 0.05x = \tan t \Rightarrow x = 20\tan t$$

$$du = a\sec^2t\,dt \Rightarrow du = a(0/05x) = 0/05dx = \sec^2t\,dt$$

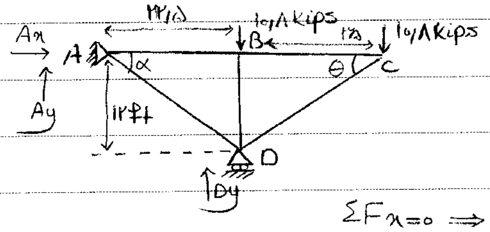
$$\Rightarrow dx = 20\sec^2t\,dt$$

$$S = \int\sqrt{1+20\tan^2t} \times 20\sec^2t\,dt = \left[\frac{(1+20\tan^2)^{3/2}}{3/2}\right]$$

(ادامه دارد)

WWW.iransaze.com

مثال: با استفاده از روش مفاصل نیرو در اعضای خرپای زیر را محاسبه کنید.



$n=5 \quad j=4 \quad r=3$

$5+3=2\times 4=8 \Rightarrow$ معین است

معادلات تعادل را می‌نویسیم

$\sum F_x=0 \Rightarrow A_x=0$

$\sum M_A=0 \Rightarrow -10.8\times 57.5-10.8\times 22.5+D_y\times 22.5=0$

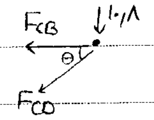
$\Rightarrow D_y=38.4$

$\sum F_y=0 \Rightarrow A_y+38.4-10.8-10.8=0 \Rightarrow A_y=-16.8$

$A_y=16.8\downarrow$

از یکی از گره‌های دو عضوی شروع می‌کنیم، A و C دو عضوی‌اند

گره C :



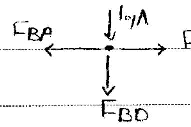
$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{12}{35}\right)=18.9$

$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{12}{22.5}\right)=28.1$

$\sum F_y=0 \Rightarrow -10.8-F_{CD}\sin 18.9 \Rightarrow F_{CD}=-33.3 \Rightarrow F_{CD}=33.3\ kips\ (C)$ فشاری

$\sum F_x=0 \Rightarrow -F_{CB}+33.3\cos 18.9=0 \Rightarrow F_{CB}=31.5\ (T)$ کششی

گره B :



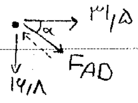
$\sum F_x=0 \Rightarrow -F_{BA}+31.5=0$

$F_{BA}=31.5\ (T)$

$\sum F_y=0 \Rightarrow -10.8-F_{BD}=0 \Rightarrow F_{BD}=-10.8$

$\Rightarrow F_{BD}=10.8\ (C)$

گره A :



$\sum F_x=0 \Rightarrow 31.5+F_{AD}\cos 28.1=0$

$F_{AD}=-35.7\ kips$

$F_{AD}=35.7\ (C)$ فشاری

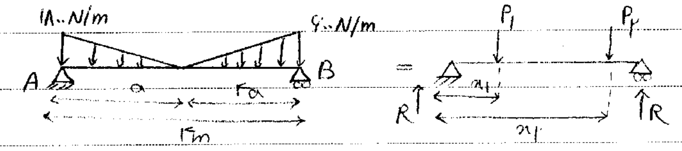
معادله $\sum F_y=0$ را برای کنترل درستی جواب می‌نویسیم

$\sum F_y=0 \Rightarrow -16.8+35.7\sin 28.1 \simeq 0.7$

Tamasha

WWW.iransaze.com

مثال : در تیر شکل زیر فاصله a را به گونه‌ای تعیین کنید که واکنش‌های تکیه‌گاه a و b با هم مساوی شوند؟ (۵-۸۵ ص ۱۸۱)



$P_1 = \frac{1800a}{2} = 900a \quad , \quad x_1 = a/3$

$P_2 = \frac{600(4-a)}{2} = 300(4-a) \quad , \quad x_2 = 4 - \frac{(4-a)}{3} = \frac{8-a}{3}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2R - 900a - 300(4-a) = 0 \Rightarrow 2R - 900a - 1200 + 300a = 0$

$R = 300a + 600 \quad (1)$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 4R - P_2 \times x_2 - P_1 \times x_1 = 0 \Rightarrow 4(300a + 600) - 300(4-a)\left(\frac{8-a}{3}\right) - 900 \times a/3 = 0$

$\Rightarrow 1200a + 2400 - 3200 + 1200a - 100a^2 - 300a^2 = 0$

$-400a^2 + 2400a - 800 = 0 \Rightarrow a^2 - 6a + 2 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4(2)(1) = 28$

$a = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{2} = \begin{cases} a = 5.6 \geq 4 \ \times \\ a = 0.35 \ \checkmark \end{cases}$

$\Rightarrow R = 300 \times 0.35 + 600 = 705 \ N$

روش مقطع :

این روش بیشتر در حالتی استفاده می‌شود که قطع نیروی یک یا چند عضو خاص از خرپا مورد نظر باشد. نحوه حل مسائل در این روش به شرح زیر است :

۱) با رسم دیاگرام آزاد خرپا و نوشتن معادلات تعادل، واکنش‌های تکیه‌گاهی را محاسبه می‌کنیم.

۲) در خرپا یک مقطع ایجاد می‌کنیم. مقطع ایجاد شده باید دارای شرایط زیر باشد :

الف) خرپا را حداقل به دو تکه مجزا تقسیم کند

ب) عضو یا اعضای مورد نظر را قطع کند. اگر تعداد اعضای مورد نظر دو یا بیشتر باشد

Tamasha

WWW.iransaze.com

ممکن است بیش از یک مقطع نیاز باشد

ج) تعداد اعضای قطع شده حداکثر سه عضو باشد. اگر در مقطعی چهار عضو مورد نظر قطع شود عضوهای قطع شده موازی یا همرس باشند می‌شود تعداد اعضای قطع شده بیش از ۳ عضو باشد

د) اعضای قطع شده همزمان موازی یا متقارب نباشند

۳) از تکه‌های ایجاد شده در خرپا یک تکه را که اگر در دیاگرام آزاد آن را رسم می‌کنیم. دیاگرام آزاد این تکه شامل تمامی نیروهای معلوم و مجهول وارد بر آن است. در دیاگرام آزاد اعضای قطع شده رسم نمی‌شوند ولی نیروهای آن‌ها به صورت مجهول ترسیم می‌گردد

۴) در تکه انتخاب شده معادلات تعادل را می‌نویسیم تا نیروی عضو یا اعضای مورد نظر محاسبه شوند

اگر فقط نیروی یک عضو مورد نظر باشد بهتر است برای این کار فقط معادله‌ای را بنویسیم که منجر به نیروی آن عضو شود

این معادله بیشتر از نوع تعادل گشتاوری است. ابتدا روابط تعادل $\sum F_x = 0$ ، $\sum F_y = 0$ را کنترل می‌کنیم که آیا نیروی عضو مورد نظر تعیین می‌شود یا خیر (ممکن است برای راحتی تعیین عضو مورد نظر محورهای مختصات را به صورت مورب در نظر بگیریم) اگر روابط فوق منجر به تعیین نشد سراغ معادله تعادل لنگر می‌رویم. در این حالت عضو مورد نظر را کنار گذاشته و دیگر نیروهای مجهول را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در یک نقطه قطع کنند (۲ تا)

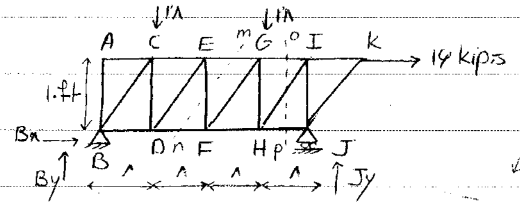
سپس معادله تعادل لنگر را حول نقطه مورد نظر می‌نویسیم تا نیروی عضو مورد نظر به دست آید

بعضاً ممکن است نقطه‌ای وجود نداشته باشد که تمام شرایط مورد نظر را داشته باشد در این حالت در مجاورت عضو مورد نظر مقطعی کمکی می‌زنیم و نیروی اعضای مجاور را به دست می‌آوریم سپس با کم شدن تعداد مجهولات به مقطع اصلی باز می‌گردیم و نیروی عضو مورد نظر را محاسبه می‌کنیم

در برخی موارد بیش از یک قطعه‌ای از خرپا به وجود می‌آید که در آن واکنش‌های تکیه‌گاه حضور ندارند در این حالت می‌توان بدون محاسبه واکنش‌ها به سراغ مقطع رفت

مثال: مطلوبست تعیین نیروی عضوهای EF و GI در خرپای نشان داده شده؟

نمودار آزاد خرپا را رسم می کنیم



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = 16$

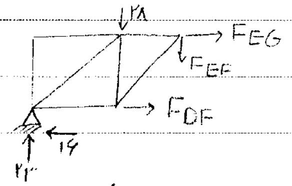
$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -16\times 10 + J_y \times 32 - 28\times 24 - 28\times 8 = 0$

$\Rightarrow J_y = 33 \text{ kips}$

$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y - 28 - 28 + 33 = 0 \Rightarrow B_y = 23$

مقطعی وجود ندارد که شامل هر دو عضو مورد نظر بوده و تمام شرایط را نیز داشته باشد، پس برای هر کدام از دو عضو یک مقطع به صورت جداگانه می زنیم

عضو EF : مقطع mn را می زنیم و یک سمت جسم را انتخاب کرده و دیاگرام آزاد آن را رسم می کنیم

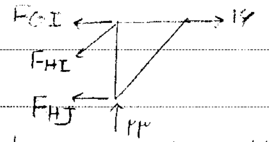


معادله $\Sigma F_y = 0$ مستقیماً نیروی عضو EF را نتیجه می دهد

$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 23 - 28 - F_{EF} = 0$

$\Rightarrow F_{EF} = -5 \Rightarrow F_{EF} = 5 \text{ kips}$ فشاری

عضو GI : برای عضو GI از مقطع op مطابق شکل کمک می گیریم. سپس دیاگرام آزاد آن را که سمت راست را رسم می کنیم



در اینجا روابط $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ منجر به نیروی عضو GI نمی شوند پس سراغ معادله تعادل لنگر می رویم

عضو GI را که از آن گذشته و نیروی دو عضو مجهول دیگر یعنی HI و HJ را امتداد می دهیم، امتداد این دو عضو یکدیگر را در نقطه H قطع می کنند پس معادله تعادل لنگر را حول این نقطه می نویسیم

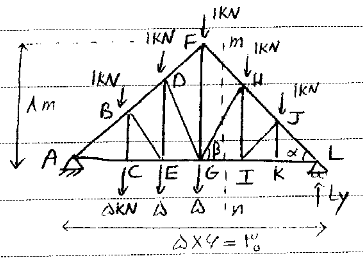
$\circlearrowleft \Sigma M_H = 0 \Rightarrow -16\times 10 + 33\times 8 + F_{GI}\times 10 = 0 \Rightarrow F_{GI} = -10.4$

$\Rightarrow F_{GI} = 10.4$ فشاری

نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک کارشناسی مهندس احمدرضا جعفری، دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

WWW.iransaze.com

مثال: مطلوبست تعیین نیروی عضوهای FH، GI و GH در خرپای زیر.

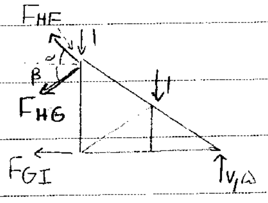


برای هر یک از عضوها کافیست که از مقطع عبوری نشان داده شده در شکل استفاده کنیم
و بهتر است که سمت راست که شکل و بارگذاری ساده‌تری دارد انتخاب کنیم
لیکن سمت راست واکنش تکیه‌گاه L وجود دارد
که ابتدا باید این واکنش محاسبه شود

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow L_y \times 30 = 1\times 25 - 1\times 20 - 1\times 15 - 1\times 10 - 1\times 5 - 5\times 15 - 5\times 10 - 5\times 5 = 0$$

$$\Rightarrow L_y = 7.5\,KN$$

حال دیاگرام سمت راست مقطع mn از خرپا را رسم می‌کنیم
ابتدا با توجه به هندسه سازه زوایای α و β و طول قطعه HI را
بدست می‌آوریم



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{8}{15}\right) = 28.07°$$

$$\text{تشابه}: \frac{HI}{8} = \frac{10}{15} \Rightarrow HI = 5.33m$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{5.33}{5}\right) = 46.85°$$

حال به سراغ معادلات تعادل می‌رویم، دو معادله $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ به ترتیب نفر سوم رسیدن به سراغ معادله تعادل لنگر می‌رویم برای عضو GI معادله تعادل لنگر حول نقطه H نوشته می‌شود

$$\circlearrowleft \Sigma M_H = 0 \Rightarrow -F_{GI}\times 5.33 - 1\times 5 + 7.5\times 10 = 0 \rightarrow F_{GI} = 13.13$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_G = 0 \Rightarrow 7.5\times 15 - 1\times 10 - 1\times 5 + F_{HF}\times GH\sin(\alpha+\beta)$$

$$GH = \sqrt{5^2 + 5.33^2} = 7.31$$

$$\alpha+\beta = 28.07 + 46.85 = 74.92°$$

مقادیر فوق را در معادله بالا جایگزین می‌کنیم

$$F_{FH} = -13.81 \Rightarrow F_{FH} = 13.81 \text{ فشاری}$$

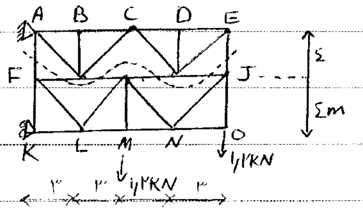
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -F_{HG}\sin 46.85 - 13.81\sin 28.07 - 1 - 1 + 7.5 = 0$$

$$\Rightarrow F_{HG} = -1.371\,KN \Rightarrow F_{HG} = 1.371\,(C)$$

Tamasha

WWW.iransaze.com

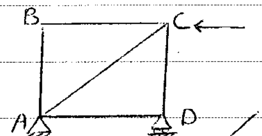
تمرین: مطلوبست تعیین نیروی اعضای AF و EJ در خرپای شکل زیر؟
راهنمایی: از مقطع ترسیم شده در شکل کمک بگیرید؟



مقطع نشان داده شده در شکل بیش از ۳ عضو را قطع می‌کند اما با توجه به اینکه غیر از یک عضو، بقیه اعضا قطع شده در یک نقطه متقاطع‌اند، مقطع قابل قبول است!
نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه تقاطع، نیروی عضو دیگر را بدست می‌آید

EJ : $\Sigma M_F = 0$, AF : $\Sigma M_J = 0$

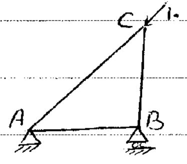
موارد خاص در خرپا:
۱) گره‌های دو عضوی: در گره‌های دو عضوی می‌توان مستقیماً دیاگرام آزاد گره را رسم کرده و نیروی هر دو عضو را بدست آورد. اگر گره متصل به تکیه‌گاه باشد ابتدا باید واکنش آن تکیه‌گاه را محاسبه کرد و سپس دیاگرام آزاد گره را رسم کرد. اگر گره فاقد نیرو باشد هر دو عضو صفر نیرویی خواهند شد



گره B دو عضوی و فاقد نیرو است

$F_{AB} = F_{BC} = 0$

اگر در گره دو عضوی یک نیرو داشته باشیم و آن نیرو موازی یکی از دو عضو باشد نیرو مستقیماً به آن عضو منتقل می‌شود و عضو دیگر دارای صفر نیرویی می‌شود

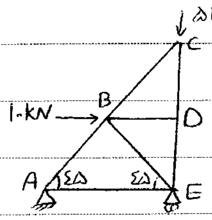


$F_{AC} = 10\,KN$
$F_{BC} = 0$

۲) گره سه عضوی وقتی که دو عضو موازی هم باشند.
در این حالت می‌توان دیاگرام آزاد گره را ترسیم نموده و معادله تعادل در راستای محور عمود بر دو عضو موازی را نوشت و نیروی عضو سوم را محاسبه کرد. اگر در راستای این محور مؤلفه نیرویی نباشد عضو سوم صفر نیرویی است

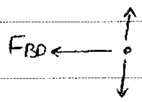
نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک کارشناسی مهندس احمدرضا جعفری، دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

Date : / /



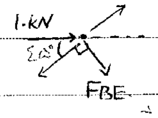
با صفر شدن عضو BD این عضو قابل حذف است آنگاه گره D نیز دارای همین شرایط است

گره D: سه عضوی، DE و CD موازی



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{BD} = 0$

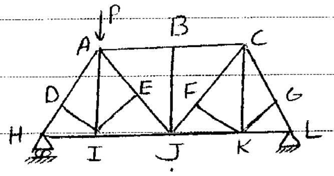
گره B:



$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow 10 \sin 45 + F_{BE} = 0$

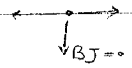
$F_{BE} = -7.07 \Rightarrow F_{BE} = 7.07$ فشاری

مثال: در خرپای شکل زیر اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید؟

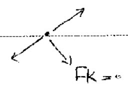


هرگاه گره دو عضوی فاقد نیروی خارجی باشد ... در گره H و L دو عضوی اند اما به دلیل واکنش های تکیه گاهی نیرو دارند. نیروهای تکیه گاهی در راستای یکی از دو عضو است ... بنابراین عضو دیگر صفر نیرویی است

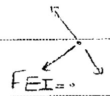
گره های ۳ عضوی با دو عضو موازی: گره B:



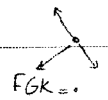
گره F:



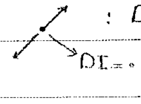
گره E:



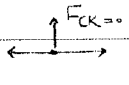
گره G:



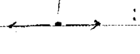
گره D:



گره K:

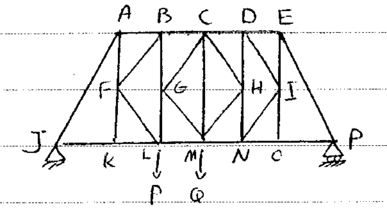


گره I:



مثال: در خرپای شکل زیر اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید؟

Tamasha



مثلا گره دو عضوی دارای شرایط عضو صفر نیرویی نمی باشد

گره سه عضوی با دو عضو هم راستا:

گره O: $F_{OI}=0$

گره K: $F_{KF}=0$

گره های دیگر فاقد شرایط عضو صفر نیرویی اند

قابها (سازه های دارای اعضای چند نیرویی):

قاب مجموعه ای از اعضایی است که با اتصالات مفصلی به یکدیگر متصل شده اند آنچه قاب را از خرپا متمایز می کند حداقل یک یا چند عضو چند نیرویی است.

1) اعضا می توانند غیر از مفصل های انتهایی در نقاط میانی خود نیز تحت اثر بار باشند

2) لزومی به مستقیم بودن عضو نیست و عضو می تواند به صورت منحنی یا چند تکه نیز باشد

3) لزومی ندارد که عضو فقط در دو انتهای خود به اعضای مجاور وصل شده باشد و غیر از نقاط فوق می تواند در نقاط میانی خود نیز به اعضای مجاور متصل شود

روش حل مسائل قاب:

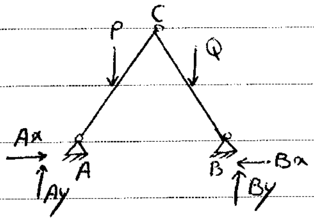
ابتدا با رسم دیاگرام آزاد قاب و نوشتن معادلات تعادل واکنش های تکیه گاهی قاب را محاسبه می کنیم سپس قاب را به چند تکه تقسیم می کنیم و برای هر تکه از قاب دیاگرام آزاد آن را رسم می نماییم و معادلات تعادل را می نویسیم. در رسم دیاگرام آزاد در هر مفصل باید دو واکنش افقی و عمودی مجهول قرار داده شود. برای قطعات مجاور در همان مفصل مقادیر واکنش ها همان مقادیر ولی با جهات متفاوت هستند (برآیند نیروهای مختلف وارد بر مفصل از طرف قطعات مختلف باید صفر شود)

اگر بیش از دو قطعه به یک مفصل متصل شده باشد واکنش های وارد بر گره از طرف هر یک از قطعات لزومی ندارد که با هم مساوی باشند اما در هر صورت برآیند آنها باید صفر شود بجای دو واکنش افقی و عمودی مجهول می توان یک واکنش

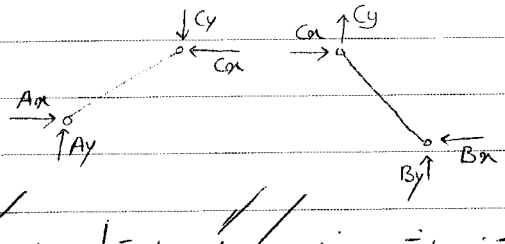
Tamasha

WWW.iransaze.com

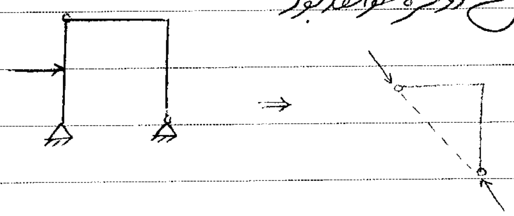
با مقدار و راستای مجهول نیرو جایگزین کرد



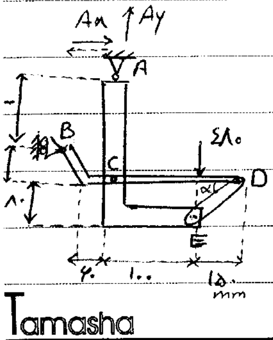
چون نیروهایی که گره ها وارد می شوند مجموعه قاب است نه خرپا، نیروی ندارد که در مرحله اول تمام واکنش های تکیه گاهی محاسبه شود و ممکن است در حالتی که تعداد واکنش های تکیه گاهی چهار یا بیشتر باشد برخی از واکنش ها به جای استفاده از معادلات تعادل کل قاب از طریق معادلات تعادل قطعات قاب بدست آید



نکته: اگر عضوی از قاب فقط به دو مفصل متصل باشد و در فاصله ابتدا تا انتهای خود (غیر از دو مفصل) فاقد نیرو باشد، نیرویی که گره ها به قطعه وارد می کنند یک تک نیرو در راستای خط واصل دو گره خواهد بود



مثال: در قاب نشان داده شده عضوهای ACE و BCD بوسیله پین C و میله DE به هم متصل شده اند با توجه به بارگذاری مفروض نیرو در میله DE و مولفه های نیروی وارد بر عضو BCD در نقطه C را تعیین کنید.



مجموعه شامل سه تکه ACE و BCD و DE می باشد

قطعه DE حالت یک میله را دارد و نیروی آن در راستای DE می باشد، دیاگرام آزاد مجموعه را رسم می کنیم

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 480 = 0 \quad A_y = 480\,N \uparrow$$

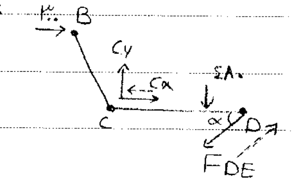
Tamasha

Date : / /

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -480 \times 100 + B_x \times 160 = 0 \Rightarrow B_x = 300$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 300 + A_x = 0 \quad A_x = -300 \Rightarrow A_x = 300\,N \leftarrow$

عضو BCD :



$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{80}{150}\right) = 28.07°$

$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0 \Rightarrow -300 \times 60 - C_y \times 250 + 480 \times 150 = 0$

$\Rightarrow C_y = 216\,N \uparrow$

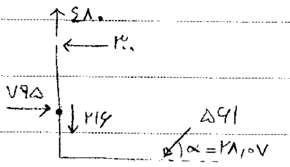
$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 216 - 480 - F_{DE} \sin 28.07 = 0 \Rightarrow F_{DE} = -561\,N$

$\Rightarrow F_{DE} = 561\,N\,(C)$ فشاری

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 300 + C_x + 561 \cos 28.07 = 0$

$\Rightarrow C_x = -795\,N \Rightarrow C_x = 795\,N \leftarrow$

قطعه ACE :

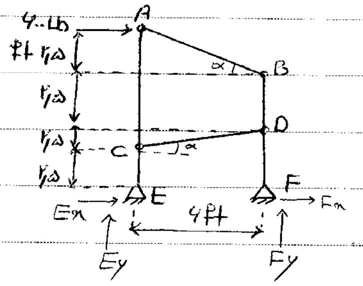


نکته : نیرویی که میله DE به دو مفصل ابتدا و انتهای خود وارد می‌کند مساوی و خلاف جهت است

در اینجا هیچ واکنش مجهولی وجود ندارد فقط جهت کنترل جواب یکی از معادلات تعادل را می‌نویسیم

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 795 \times 220 - 561 \cos 28.07 \times 300 - 561 \sin 28.07 \times 100 = 0$ ✓

مثال : در قاب مطابق شکل نیروی افقی 600 پوند بر پین‌ها وارد می‌شود نیروهای وارد بر روی عضو عمودی این قاب را تعیین کنید؟



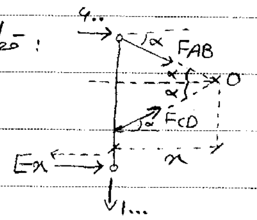
مجموعه شامل چهار تکه ACE ، BDF ، AB و CD می‌باشند که قطعه AB و CD میله می‌باشند میله‌ها دارای یک نیرو در راستای خود هستند که جهت این نیرو در دو مفصل ابتدا و انتها مخالف هم می‌باشند، دیاگرام آزاد مجموعه را رسم می‌کنیم

$\circlearrowleft \Sigma M_E = 0 \Rightarrow -600 \times 10 + F_y \times 6 = 0 \Rightarrow F_y = 1000\ Lb \uparrow$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow E_y + 1000 = 0 \Rightarrow E_y = -1000\ Lb \Rightarrow E_y = 1000 \downarrow$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow E_x + F_x + 600 = 0 \Rightarrow E_x + F_x = -600 \quad (1)$

قطعه ACE :



$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2.5}{6}\right) = 22.6°$

$\tan\alpha = \frac{3.75}{x} \Rightarrow x = \frac{3.75}{\tan\alpha} = \frac{3.75}{\tan 22.6} = 9\ ft$

گشتاور را حول نقطه O می‌نویسیم تا دو مجهول از ۳ مجهول کم شود

$\circlearrowleft \Sigma M_O = 0 \Rightarrow 1000 \times 9 - 600 \times 3.75 + E_x \times 6.25 = 0$

$\Rightarrow E_x = -1080\ Lb \Rightarrow E_x = 1080 \leftarrow$

مقدار بدست آمده را در معادله (1) قرار می‌دهیم چون برای E_x عدد منفی بدست آمده است در آنجا نیز با علامت منفی جایگزین می‌شود

معادله (1) $\Rightarrow -1080 + F_x = -600 \Rightarrow F_x = 480\ \overrightarrow{Lb}$

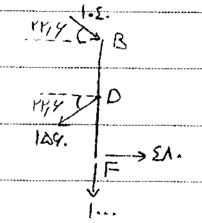
$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -1080 \times 10 + F_{CD} \times 7.5 \times \cos 22.6 = 0$

$\Rightarrow F_{CD} = 1560\ Lb\ (T)$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -1080 + 600 + 1560 \cos 22.6 + F_{AB} \cos 22.6 = 0$

$F_{AB} = -1040\ Lb \quad F_{AB} = 1040\ (C)$

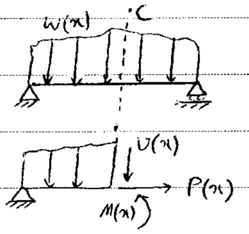
قطعه BDF فقط جهت کنترل جواب ترسیم و یکی از معادلات آن نوشته می‌شود



$\overrightarrow{\Sigma F_x} = 0 \Rightarrow 1040 \cos 22.6 - 1560 \times \cos 22.6 + 480 = 0$ ✓

دیاگرام های برش و لنگر در تیرها :

در یک تیر با بارگذاری دلخواه اگر در هر نقطه از تیر یک مقطع ایجاد کنیم تا تیر به دو تکه تقسیم شود و یکی از دو تکه را بیرون کشیده و دیاگرام آزاد آن را رسم کنیم برای آنکه این تکه دارای تعادل باشد باید در مقطع برش سه واکنش داخلی وجود داشته باشد این سه واکنش بصورت دو نیرو به موازات و عمود بر راستای تیر و یک گشتاور خمشی می باشند



این سه واکنش با نوشتن معادلات تعادل قطعه انتخاب شده از تیر قابل محاسبه است. نیروی بدست آمده به موازات تیر نیروی محوری در آن نقطه، واکنش عمود بر راستای تیر، نیروی برشی آن نقطه و لنگر خمشی بدست آمده لنگر خمشی آن نقطه می باشند. اگر برای تمامی نقاط تیر این واکنش های داخلی محاسبه شود از کنار هم قرار دادن مقادیر بدست آمده سه دیاگرام بدست می آید. این دیاگرام ها عبارتند از: دیاگرام نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی. در تیر با توجه به اینکه معمولا در تیرها مقدار نیروی محوری قابل توجه نیست دیاگرام نیروی محوری از اهمیت کمتری برخوردار است و معمولا دو دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی ترسیم می شوند

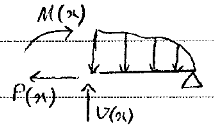
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P(x) =$ نیروی محوری

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V(x) =$ نیروی برشی

$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow M(x) =$ لنگر خمشی

قرارداد برای جهت مثبت واکنش های داخلی بر حسب آنکه قطعه سمت چپ یا سمت راست تیر انتخاب شود خلاف هم و مطابق شکل است

قطعه سمت راست :

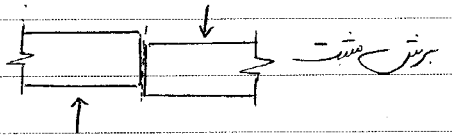


در محل برش بهتر است قطعه ای انتخاب شود که شکل ساده تری دارد اگر دو قطعه از این لحاظ تفاوت قابل ملاحظه ای نداشتند بهتر است قطعه سمت چپ انتخاب شود

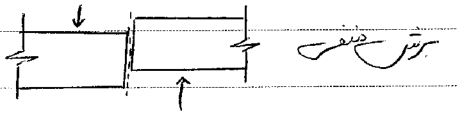
برای تعیین جهت مثبت و منفی واکنش های داخلی به شکل زیر نیز می توان عمل کرد:

Tamasha

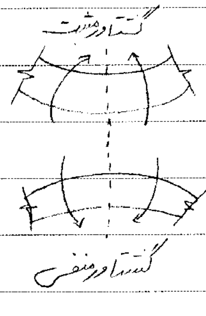
در مورد نیروهای محوری، نیروهای کششی همیشه مثبت و نیروهای فشاری همیشه منفی هست
در مورد نیروی برشی اگر نیروهای وارد بر تیر به گونه ای باشند که تمایل داشته باشند قطعه
سمت چپ نقطه مورد نظر را نسبت به قطعه سمت راست به سمت بالا حرکت دهند
برش مثبت است و عکس آن برش منفی است



پس بر این اساس اگر
قطعه سمت چپ انتخاب شود



و یا از چپ به راست جهت ترسیم
دیاگرام حرکت می کنیم نیروهای رو
به بالا مثبت و رو به پایین منفی هست
برعکس آن اگر قطعه سمت راست را انتخاب کردیم و یا از راست به چپ دیاگرام
را ترسیم می کنیم نیروهای رو به پایین مثبت و رو به بالا منفی است
در مورد گشتاور اگر گشتاورهای وارد بر تیر تمایل داشته باشند که تیر در نقطه مورد نظر انحنای
رو به بالا ایجاد کنند گشتاور مثبت و در غیر اینصورت منفی هست



پس بر این اساس اگر قطعه سمت چپ
انتخاب شده باشد و یا حرکت از چپ به راست باشد
گشتاورهای ساعتگرد مثبت و پادساعتگرد منفی فرض
می شود برعکس آن اگر قطعه سمت راست انتخاب
شود و یا حرکت از راست به چپ باشد گشتاور پادساعتگرد
مثبت و ساعتگرد منفی است

روش های ترسیم دیاگرام:

۱) روش مقطع: در این روش در نقطه دلخواه با فاصله مجهول از دو انتهای یک مقطع زده می شود
و با انتخاب یکی از دو قطعه و استفاده از یکی از روش های گفته شده مقادیر
عکس العمل داخلی محاسبه می گردد چون موقعیت این نقطه مجهول است

WWW.iransaze.com

مقادیر بدست آمده برای واکنش ها نیز با بعضی از یک متغیر مثل x که واحد طول است بیان می توان با استفاده از روش های ریاضی نمودارهای مربوطه را ترسیم نمود

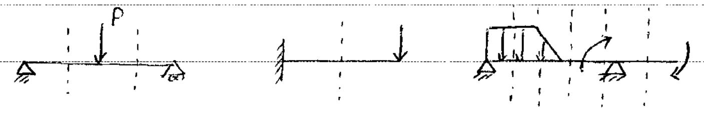
در هر تیر لزوماً به یک مقطع نیاز نیست و گاهی به بیش از یک مقطع نیاز داریم در انتخاب مقاطع در تیر باید به نکات زیر توجه کرد:

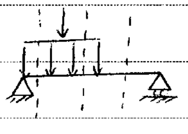
۱) به ازای هر بار متمرکز در تیر (شامل واکنش های تکیه گاهی) نیاز به یک مقطع قبل و بعد از بار متمرکز می باشد

۲) اگر شکل بار گسترده در طول تیر تغییر کند به ازای هر قطعه نیاز به یک برش است

۳) اگر تکه ای از تیر شامل بار گسترده و تکه دیگر فاقد بار گسترده باشد برای هر تکه از قسمت تیر یک مقطع مورد نیاز است

نکته) ترجیحاً باید یک مبدا ثابت در انتهای سمت چپ تیر در نظر گرفت و تمامی مقادیر را نسبت به این مبدا ثابت محاسبه کرد





در ترسیم دیاگرام ها در مورد محاسبه واکنش های تکیه گاهی نمی توان بارهای گسترده را به بار متمرکز تبدیل کرد

۲) روش محاسبه سریع: در این روش از یکی از دو انتهای تیر شروع کرده و با کمک یک سری قواعد ساده شده دیاگرام ها را ترسیم می کنیم برخی از این قواعد به شرح زیر است:

۱- بار وارد بر تیر، دیاگرام برش و دیاگرام لنگر نسبت به هم دارای روابط مشتق و انتگرال می باشد به این گونه که دیاگرام گشتاور، انتگرال دیاگرام برش و دیاگرام برش، انتگرال معادله بار وارد بر تیر است برعکس آن معادله بار وارد بر تیر مشتق دیاگرام برش و دیاگرام برش مشتق دیاگرام خمش است در قسمت های بعدی به استفاده هایی که از این نکات می شود اشاره می شود

Tamasha

۲- در قسمتی که به تیر باری وارد نمی‌شود دیاگرام برش خط مستقیم و دیاگرام لنگر خط مایل است

۳- در محل بارهای متمرکز در دیاگرام برش ایجاد جهش به مقدار بار متمرکز و هم جهت با آن (در صورت حرکت از سمت چپ به راست) خواهیم بود در همین نقطه در دیاگرام لنگر یک شکستگی ایجاد می‌شود

۴- در محل لنگر متمرکز دیاگرام برش بدون تغییر می‌ماند اما در دیاگرام لنگر یک جهش ایجاد می‌شود این جهش با توجه به مقدار گشتاور وارده می‌باشد در ترسیم چپ به راست گشتاور متمرکز ساعتگرد مثبت فرض می‌شود

۵- در محل اعمال بار گسترده یکنواخت نمودار برش خط مایل و نمودار لنگر سهمی است

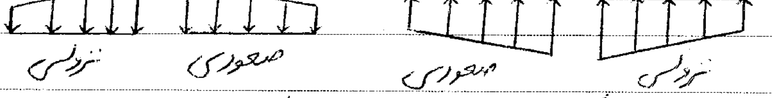
۶- در محل بار گسترده مثلثی نمودار برش درجه (۲) و نمودار لنگر درجه (۳) می‌شود

۷- هر جا مقدار برش مثبت باشد نمودار لنگر صعودی است در غیر اینصورت نزولی است

۸- هر جا بار گسترده وارد بر تیر رو به پایین باشد نمودار برش نزولی و نمودار لنگر دارای شکم رو به پایین است (بار رو به پایین منفی فرض می‌شود) و بالعکس

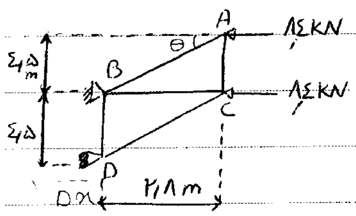
۹- در مورد بارهای گسترده غیر یکنواخت هرگاه بار صعودی باشد نمودار برش دارای شکم رو به بالا خواهد بود و بالعکس

برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن بار باید از چپ به راست حرکت کنیم و همچنین توجه کنیم که بار با جهت پایین منفی و با جهت بالا مثبت است



۱۰- مقدار لنگر در هر نقطه از تیر برابر انتگرال نمودار برش از ابتدا تا آن نقطه می‌باشد البته اگر در این محدوده به تیر گشتاور متمرکزی وارد شده باشد باید این گشتاور متمرکز به سطح زیر نمودار اضافه شود

مثال: با استفاده از روش مفصل نیروی اعضای خرپای شکل زیر را محاسبه کنید؟



$J=4\ ,\ n=5\ ,\ r=3$

$2\times4 = 5+3 = 8 \Rightarrow$ معین است

$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y = 0$

$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0 \Rightarrow 8.4\times9 + 8.4\times4.5 - B_x\times4.5 = 0$

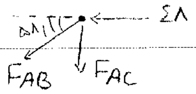
$\Rightarrow B_x = 25.2\ kN$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow D_x + 25.2 - 8.4 - 8.4 = 0$

$\Rightarrow D_x = -8.4\ kN \Rightarrow \overleftarrow{D_x = 8.4\ kN}$

از یکی از دو گره A و D می‌توانیم شروع کنیم

گره A: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4.5}{2.8}\right) = \ldots \Rightarrow \theta = 58.1^\circ$



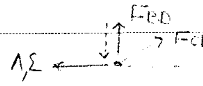
$\Rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow -8.4 - F_{AB}\cos58.1 = 0$

$\Rightarrow F_{AB} = -15.9 \Rightarrow F_{AB} = 15.9\ kN\ (C)$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{AC} + 15.9\times\sin58.1 = 0$

$\Rightarrow F_{AC} = 13.5\ (kN)\ (T)$

گره D:



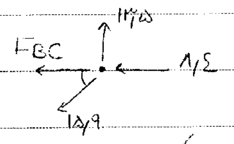
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -8.4 + F_{CD}\cos58.1 = 0$

$\Rightarrow F_{CD} = 15.9\ kN\ (T)$

$\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{BD} + 15.9\sin58.1 = 0 \Rightarrow F_{BD} = -13.5$

$F_{BD} = 13.5\ (C)$

گره C:

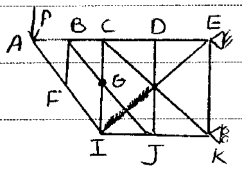


$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_{BC} - 8.4 - 15.9\cos58.1 = 0$

$F_{BC} = -16.8 \Rightarrow F_{BC} = 16.8\ (C)$

(برای کنترل) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 13.5 - 15.9\sin58.1 = 0$

مثال: در خرپای شکل زیر اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید؟



تنها گره دو عضوی گره A است که این گره دارای نیرو می‌باشد سپس در سه گره موازی هیچ یک از دو عضو متصل به گره نیست اگر موازی بود عضو سوم صفر نیرویی بود بر این اساس دو عضو متصل به این گره صفر نیرویی هستند

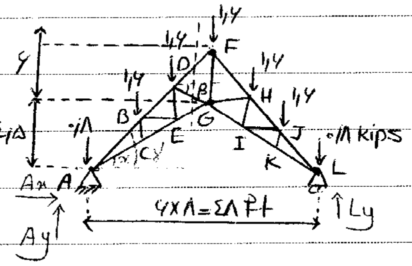
گره‌های سه عضوی با دو عضو موازی:

گره‌های F,D : BF, DH

گره B : BG　　　　گره J : JH

گره G : JG　　　　گره H : HE

مثال: در خرپای شکل زیر به روش مقطع نیروی عضوهای DF، DG و EG را محاسبه کنید؟



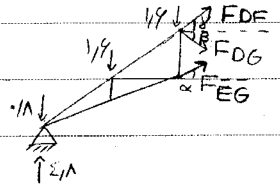
یک مقطع عمودی مطابق شکل که هر سه عضو مورد نظر را قطع می‌کند دارای تمامی شرایط نیز می‌باشد. یک سمت چپ را انتخاب می‌کنیم. در این سمت واکنش تکیه‌گاه A وجود دارد که ابتدا باید با استفاده از معادلات تعادل خرپا واکنش‌های این تکیه‌گاه را محاسبه کنیم.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma M_L = 0 \Rightarrow -A_y \times 48 + 0.8 \times 48 + 1.6 \times (40 + 32 + 24 + 16 + 8) = 0$$

$$A_y = 4.8 \text{ kips} \uparrow$$

چون خرپا از لحاظ شکل و بارگذاری متقارن است واکنش‌های عمودی دو تکیه‌گاه با هم برابر است و مقدار هر کدام نصف مجموع بارهای عمودی وارد بر خرپا است

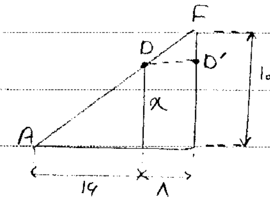


$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4.5}{24}\right) = 10.6^\circ$$

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{10.5}{24}\right) = 23.6^\circ$$

Tamasha

WWW.iransaze.com



تشابه : $\frac{16}{24} = \frac{x}{10.5} \Rightarrow x = 7$

$\Rightarrow D'F = 10.5 - 7 = 3.5$

$D'G = 6 - 3.5 = 2.5$

$\tan\beta = \frac{D'G}{DD'} = \frac{2.5}{8} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{2.5}{8}\right) = 17.35^\circ$

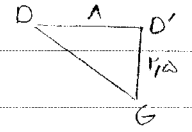
F_{DG} محاسبه : $\curvearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -1.6 \times 8 - 1.6 \times 16 - F_{DG} \times AD \times \sin(\beta + \gamma) = 0$

$AD = \sqrt{16^2 + 7^2} = 17.46 \qquad \beta + \gamma = 17.35 + 23.6 = 40.95^\circ \Rightarrow F_{DG} = -3.125$

$\Rightarrow F_{DG} = 3.125\ (C)$

F_{DF} محاسبه : $\curvearrowleft \Sigma M_G = 0 \Rightarrow -4.8 \times 24 + 0.8 \times 24 + 1.6 \times 16 + 1.6 \times 8$

$- F_{DF} \times DG \times \sin(\alpha + \beta) = 0$



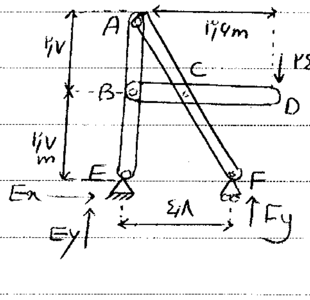
$\Rightarrow DG = \sqrt{8^2 + 2.5^2} = 8.38 \Rightarrow F_{DF} = -10.48$

$\Rightarrow F_{DF} = 10.48\ (C)$

F_{EG} محاسبه : $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -10.48\cos\gamma - 3.125\cos\beta + F_{EG} \times \cos\alpha = 0$

$F_{EG} = 13.02\ kips\ (T)$

مثال : در قطعه‌ای نیروی وارد بر هر عضو از قاب نشان داده شده در شکل را تعیین کنید.



مجموعه از سه قطعه ABE و ACF و BCD تشکیل شده است.

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow E_x = 0$

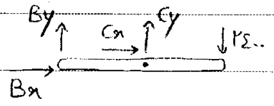
$\curvearrowleft \Sigma M_E = 0 \Rightarrow F_y \times 4.8 - 2400 \times 3.6 = 0$

$F_y = 1800\ N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 1800 - 2400 + E_y = 0 \qquad E_y = 600\ N \uparrow$

WWW.iransaze.com

عضو BCD :



$\curvearrowleft \Sigma M_B = 0 \quad -2400 \times 3.6 + C_y \times BC = 0$

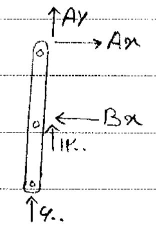
$\Rightarrow C_y = 3600\ N \uparrow$

تشابه : $\dfrac{BC}{4.8} = \dfrac{2.7}{5.4} \Rightarrow BC = 2.4$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y + 3600 - 2400 = 0 \Rightarrow B_y = -1200 \Rightarrow B_y = 1200 \downarrow$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x + C_x = 0$ ①

عضو ABE :



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 600 + 1200 + A_y = 0$

$A_y = -1800 \rightarrow A_y = 1800 \downarrow$

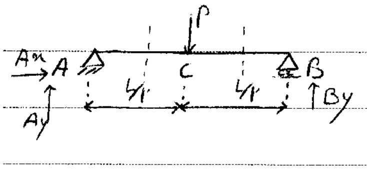
$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -B_x \times 2.7 = 0 \Rightarrow B_x = 0$

① $\Rightarrow 0 + C_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

باتوجه به آنکه تمام مجهولات محاسبه شده نیازی به رسم دیاگرام آزاد قطعه ACF نیست در صورت تمایل فقط جهت کنترل جواب ها این قطعه را نیز رسم و یکی از معادلات تعادل آن را می نویسیم

مثال : نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر با بارگذاری نشان داده شده را ترسیم کنید.



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

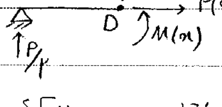
$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow A_y \cdot L + \dfrac{PL}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \dfrac{P}{2}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P/2 - P + B_y = 0 \Rightarrow B_y = P/2$

روش مقطع : A به عنوان مبدأ

به دو مقطع نیاز داریم

1) $0 < x < L/2 \Rightarrow$



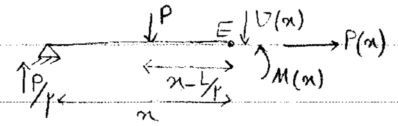
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V(x) + P/2 = 0 \Rightarrow V(x) = P/2$

$\curvearrowleft \Sigma M_D = 0 \quad \dfrac{-Px}{2} + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \dfrac{Px}{2}$

Tamasha

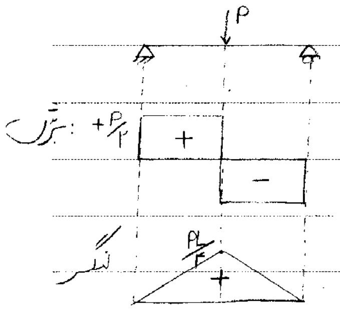
WWW.iransaze.com

2) $L/2 \leq x \leq L$

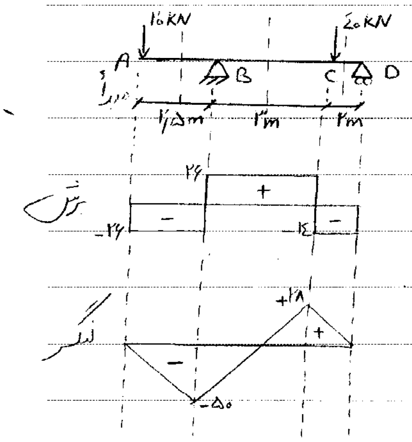


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - P - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = -\frac{P}{2}$

$\curvearrowleft \Sigma M_E = 0 \Rightarrow \frac{-Px}{2} + P(x - \frac{L}{2}) + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{P}{2}(L - x)$



مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر با بارگذاری نشان داده شده در شکل را رسم کنید.



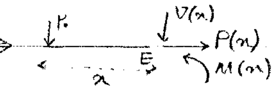
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$

$\curvearrowleft \Sigma M_D = 0 \Rightarrow 20 \times 7.5 - B_y \times 5 + 40 \times 2 = 0$

$B_y = 46\,kN \uparrow \qquad \Sigma F_y = 0$

$-20 + 46 - 40 + D_y = 0 \Rightarrow D_y = 14\,kN \uparrow$

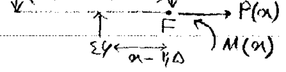
$0 \leq x < 1.5 \Rightarrow$



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -20 - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = -20$

$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow +20x + M(x) = 0 \quad M(x) = -20x$

$1.5 \leq x < 5.5 \Rightarrow$



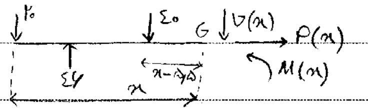
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -20 + 46 - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = 26$

$\curvearrowleft \Sigma M_F = 0 \Rightarrow +20x - 46(x - 1.5) + M(x) = 0$

$M(x) = 26x - 115$

WWW.iransaze.com

$5.5 \leq x \leq 7.5 \Rightarrow$

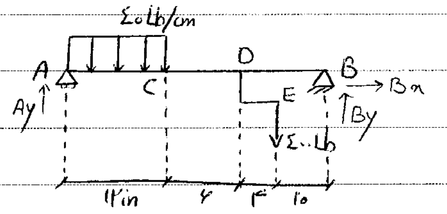


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -10 + 46 - 40 - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = -14$

$\Sigma M_G = 0 \Rightarrow 10x - 46(x - 2.5) + 40(x - 5.5) + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = -14x + 105$

معادله گشتاور به صورت معادله خط است. برای رسم یک خط کافیست که نقاط ابتدا و انتهای محدوده را عددگذاری کرده و گشتاور را با آنها رسم کنیم.

مثال: نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر AB را ترسیم کنید؟



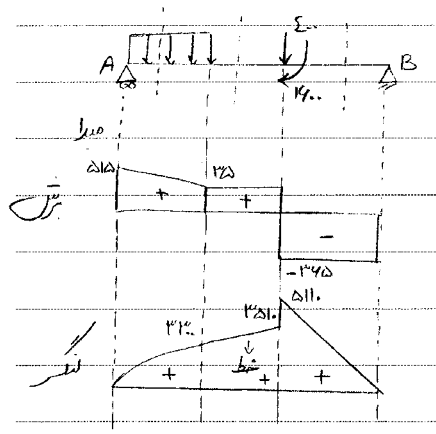
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$

$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -A_y \times 32 + (40 \times 12) \times 26 + 400 \times 10 = 0$

$\Rightarrow A_y = 515\ Lb \uparrow$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 515 - (40 \times 12) - 400 + B_y = 0$

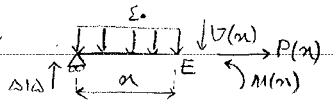
$B_y = 365\ Lb$



نیروی وارد بر نقطه E را به همراه لنگری که ایجاد می‌کند به نقطه D منتقل می‌کنیم و قطعه DE را از تیر حذف می‌کنیم.

به سه قطعه مطابق شکل نیاز داریم.

$0 \leq x \leq 12$



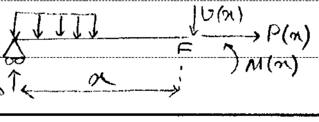
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 515 - 40x - V(x) = 0$

$V(x) = 515 - 40(x)$

$\Sigma M_E = 0 \Rightarrow -515x + (40x)\frac{x}{2} + M(x) = 0$

$M(x) = -20x^2 + 515x$

$12 < x < 18 \Rightarrow$



نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک کارشناسی مهندس احمدرضا جعفری، دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

WWW.iransaze.com

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 515 - 40\times12 - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = 35\,lb$

$\Sigma M_F = 0 \Rightarrow -515x + (40\times12)\times(x-6) + M(x) = 0 \qquad M(x) = 35x + 2880$

$18 \leqslant x \leqslant 32$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 515 - 40\times12 - 400 - V(x) = 0$

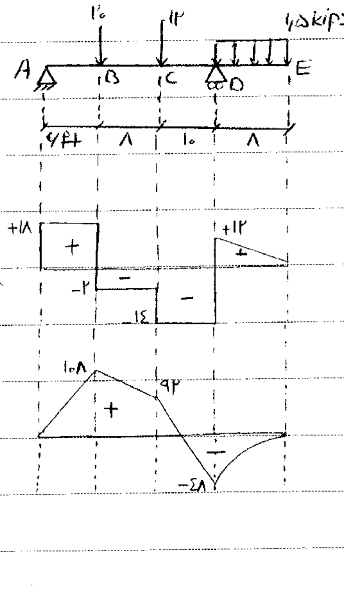
$V(x) = -365$

$\Sigma M_G = 0 \Rightarrow -515x + (40\times12)(x-6) + 400(x-18) - 1600 + M(x) = 0$

$\Rightarrow M(x) = 11680 - 365x$

در نتیجه اول منحنی لنگر سهمی است چون ضریب x^2 منفی است خم منحنی رو به پایین است

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی را برای تیر با بارگذاری نشان داده شده ترسیم کنید. (۷-٤)



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -(1.5\times8)\times28 + D_y\times24 - 12\times14 - 10\times6 = 0$

$\Rightarrow D_y = 24\ kips$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - 10 - 12 + 24 - 1.5\times8 = 0$

$A_y = 18\ kips$

روش سریع:

$V_E = 12 - 8\times1.5 = 0$

$M_B = 18\times6 = 108$

$M_C = 108 - 2\times8 = 92$

$M_D = 92 - 14\times10 = -48$

$M_E = -48 + \frac{12\times8}{2} = 0$ ✓

در مورد نمودارهای ترسیم شده نکات زیر قابل توجه است:

۱) ابتدا و انتهای نمودارها باید صفر شود

۲) در محل‌هایی که به تیر باری وارد نشده است نمودار برشی خط مستقیم و نمودار لنگر خط مورب

Tamasha

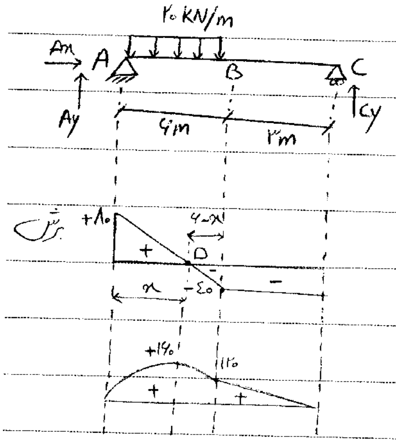
WWW.iransaze.com

۳) در محل هایی اعمال بار متمرکز در نمودار برش جهش به میزان بار و در نمودار لنگر شکستگی ایجاد شده است

۴) در محل بار گسترده نمودار برش خط مایل و نمودار لنگر سهمی است چون بار گسترده رو به پایین است منحنی برش نزولی و منحنی لنگر دارای خم رو به پایین است

۵) برای رسم نمودار لنگر از سطح زیر نمودار برش استفاده شده است

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر با بارگذاری نشان داده شده را رسم نمایید؟



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow -A_y \times 9 + (20 \times 6) \times 6 = 0 \Rightarrow A_y = 80\,kN$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 80 - 20 \times 6 + C_y = 0 \Rightarrow C_y = +40$

روش سریع:

$V_B = 80 - 20 \times 6 = -40$

تشابه: $\frac{x}{6-x} = \frac{80}{40} \Rightarrow x = 4\,m$

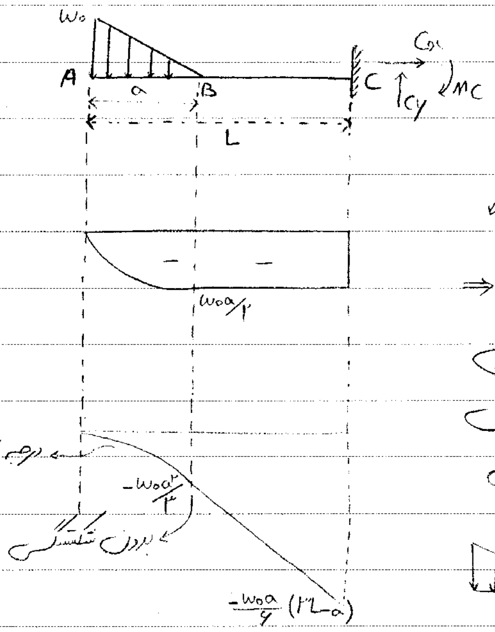
نقطه D که برش صفر است نقطه اکسترمم نمودار لنگر است

$M_D = \frac{80 \times 4}{2} = 160 \qquad M_B = 160 - \frac{40 \times 2}{2} = 120$

$M_C = 120 - 40 \times 3 = 0$ ✓

نکته: چون بار گسترده رو به پایین است خم منحنی لنگر نیز رو به پایین است در نقطه B با توجه به اینکه بار متمرکزی اعمال نشده است بایستی شیب خط در سمت راست نقطه B با شیب منحنی در سمت چپ نقطه B در نمودار لنگر یکسان باشد (شکستگی نداشته باشد)

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر شکل زیر را مشخص کنید؟



$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$

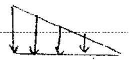
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{w_0a}{2} + C_y = 0$

$\Rightarrow C_y = \frac{w_0a}{2}$

$\sum M_C = 0 \Rightarrow +\left(\frac{w_0a}{2}\right) \times \left(L - a/3\right) - M_C = 0$

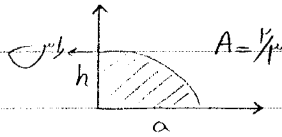
$\Rightarrow M_C = \frac{w_0a}{6}(3L-a)$

چون بار وارد بر تیر گسترده مثلثی است نمودار برشی بصورت سهمی و نمودار لنگر درجه ۳ است چون جهت بار گسترده رو به پایین است خم منحنی لنگر رو به پایین است


⇐ صعودی ⇐ خم منحنی برشی رو به بالا

بار گسترده از مقدار w_0- در نقطه A به صفر در نقطه B می رسد پس نمودار بار حالت صعودی دارد و مشتق بار که مشتق دوم برش است مثبت خواهد بود و در نتیجه خم منحنی برش رو به بالا است

$V_B = -w_0a/2$



$A = 1/3\, ah$

$M_B = -1/3 \frac{w_0a}{2} \times a = \frac{-w_0a^2}{3}$

می توان بجای سطح زیر نمودار مستقیما از تیر از سمت چپ به راست نسبت به نقطه B لنگرها را محاسبه و با هم جمع کرد در این حالت باید توجه داشت که لنگر ساعتگرد مثبت فرض شود

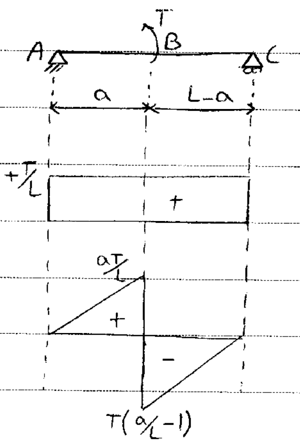
$M_B = -\left(\frac{w_0a}{2}\right) \times 1/3\, a = \frac{-w_0a^2}{3}$

$M_C = \frac{-w_0a^2}{3} - \frac{w_0a}{2}(L-a) = \frac{-w_0a}{6}(3L-a)$

نکته: در نقطه C که لنگر متمرکز وجود دارد یک جهش در نمودار ایجاد می شود چون از چپ به راست نمودار را ترسیم کرده ایم لنگر پادساعتگرد مثبت فرض می شود در نقطه B با توجه به عدم وجود بار متمرکز نباید پس در شکل نمودار شکستگی به وجود آید

WWW.iransaze.com

مثال: دیاگرام برش و لنگر تیر شکل زیر را رسم کنید؟



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0 \Rightarrow -A_y \times L + T = 0 \Rightarrow A_y = T/L$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T/L + C_y = 0 \Rightarrow C_y = -T/L \downarrow$

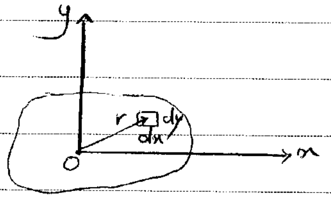
$M_B = T/L \times a$

$M_C = T(a/L - 1) + T/L \times (L - a) = 0$

$aT/L - T = T(a/L - 1)$

لنگر متمرکز در نقطه B تأثیری بر نمودار برش ندارد اما در نمودار لنگر یک جهش ایجاد می‌کند با توجه به اینکه این لنگر پاد ساعتگرد است و نمودار را از چپ به راست ترسیم می‌کنیم این جهش منفی است

ممان دوم اینرسی:



$I_x = \int y^2 dA$

$I_y = \int x^2 dA$

$I_{xy} = \int xy\, dA$

$J_0 = I_x + I_y$

J_0: اینرسی قطبی نسبت به نقطه O

$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$, $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

$r_0^2 = r_x^2 + r_y^2$ $\quad J_0 = \int r^2 dA$

I_x, I_y: ممان‌های دوم اینرسی نسبت به دو محور x و y

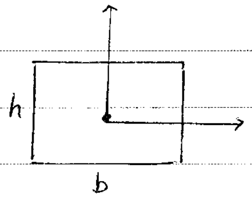
r_x, r_y: شعاع‌های چرخش یا ژیراسیون نسبت به محورهای x و y

$r_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$

r_0: شعاع چرخش قطبی نسبت به مبدأ مختصات

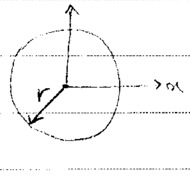
WWW.iransaze.com

ممان های اینرسی نسبت به چند شکل خاص :



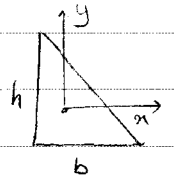
$I_x=\frac{bh^3}{12}$, $I_y=\frac{b^3h}{12}$, $r_x=\frac{h}{2\sqrt{3}}$, $r_y=\frac{b}{2\sqrt{3}}$

$J_o=\frac{bh}{12}(b^2+h^2)$ $r_o=\frac{\sqrt{b^2+h^2}}{2\sqrt{3}}$, $I_{xy}=0$



$I_x=I_y=\frac{\pi r^4}{4}$ $J_o=\frac{\pi r^4}{2}$ $r_x=r_y=r/2$

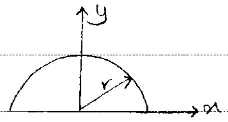
$r_o=\frac{r\sqrt{2}}{2}$ $I_{xy}=0$



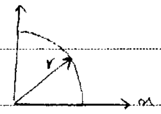
$I_x=\frac{bh^3}{36}$, $I_y=\frac{b^3h}{36}$ $J_o=\frac{bh}{36}(b^2+h^2)$

$r_x=\frac{h}{3\sqrt{2}}$ $r_y=\frac{b}{3\sqrt{2}}$, $r_o=\frac{\sqrt{b^2+h^2}}{3\sqrt{2}}$

اگر یکی از دو محور x و y محور تقارن شکل باشد I_{xy} (حاصلضرب سطح) صفر است.



$I_x=I_y=\frac{\pi r^4}{8}$ $J_o=\frac{\pi r^4}{4}$ $I_{xy}=0$



$I_x=I_y=\frac{\pi r^4}{16}$, $J_o=\frac{\pi r^4}{8}$ $I_{xy}\neq 0$

قضیه محورهای موازی :

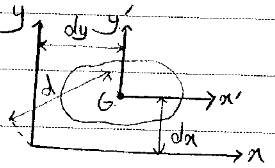
اگر محاسبه ممان اینرسی حول محوری غیر گذرنده از مرکز سطح مورد نظر باشد به شکل زیر عمل می کنیم :

ابتدا محور دیگری به موازات محور اول از مرکز سطح عبور می دهیم و ممان اینرسی

Tamasha

WWW.iransaze.com

حول محور جدید را محاسبه می‌کنیم اگر به مقدار محاسبه شده حاصلضرب مساحت مقطع در توان دوم فاصله دو محور اضافه شود ممان اینرسی حول محور اول بدست می‌آید



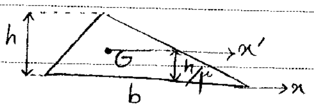
$$I_x = I_{x'} + A.dx^2$$

$$I_y = I_{y'} + A.dy^2$$

$$J_o = J_G + A.d^2$$

$$d^2 = dx^2 + dy^2$$

مثال: محاسبه ممان دوم اینرسی مثلث نسبت به قاعده آن؟



$$I_{x'} = \frac{bh^3}{36} \; , \; A = \frac{bh}{2} \; , \; d = h/3$$

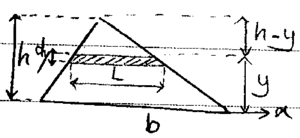
$$I_x = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{12}$$

ممان اینرسی اشکال مرکب:

در اشکال مرکب که آن‌ها را به چند شکل ساده تقسیم می‌کنیم و ممان اینرسی اشکال ساده را حول محور مورد نظر بدست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم اگر محور مورد نظر از مرکز سطح اشکال ساده شده عبور نکند ابتدا از قضیه محورهای موازی کمک می‌گیریم

$$I = \Sigma I_i$$

مثال: گشتاور دوم اینرسی یک مثلث حول قاعده‌اش را با روش انتگرال‌گیری محاسبه کنید؟



تشابه: $\frac{L}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow L = b \times \frac{h-y}{h}$

$$dA = L.dy = b \times \frac{h-y}{h} dy$$

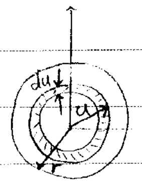
$$I_x = \int_0^h y^2 \left(b \times \frac{h-y}{h} dy\right) = b/h \int_0^h y^2 (h-y)\, dy$$

Tamasha

WWW.iransaze.com

$$= \frac{b}{h}\int_0^h (y^2h - y^3)\,dy = \frac{b}{h}\left[\frac{y^3h}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{b}{h}\left[\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right] = \frac{bh^4}{12h} = \frac{bh^3}{12}$$

مثال: گشتاور لختی قطبی یک دایره را نسبت به مرکز آن با روش انتگرال گیری بدست آورید.



$$J_0 = \int r^2 dA$$

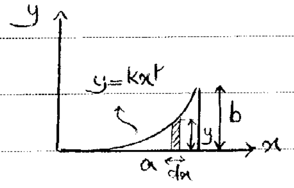
$$I_x = \int y^2 dA$$

$$dA = 2\pi u\,du$$

$$J_0 = \int_0^r u^2(2\pi u\,du) = \int_0^r 2\pi u^3 du = 2\pi\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^r$$

$$= \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2}$$

مثال: مطلوب است محاسبه گشتاور دوم اینرسی شکل زیر حول محور x و y و محاسبه شعاع های ژیراسیون حول این دو محور.

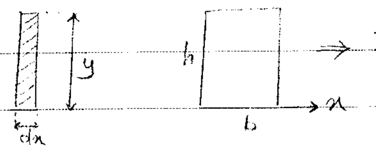


$$y = b \;,\; x = a \Rightarrow b = ka^2 \Rightarrow k = \frac{b}{a^2}$$

$$y = \frac{b}{a^2}x^2$$

$$I_x = \int dI_x$$

می‌توانیم برای المان انتخاب شده مان ممان اینرسی را محاسبه و از آن انتگرال گیری کنیم



$$\Rightarrow I_x = \frac{bh^3}{3} \Rightarrow dI_x = \frac{dx \times y^3}{3}$$

$$I_x = \int_0^a \frac{y^3}{3}dx = \int_0^a \frac{\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^3 dx}{3}$$

$$= \int_0^a \frac{b^3}{3a^6}x^6 dx = \frac{b^3}{3a^6}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^a = \frac{b^3a}{21}$$

در این حالت چون برای المان مقدار y متغیر بوده است از روش مسئله قبل استفاده نمود

Tamasha

WWW.iransaze.com

$I_y = \int x^2 dA$

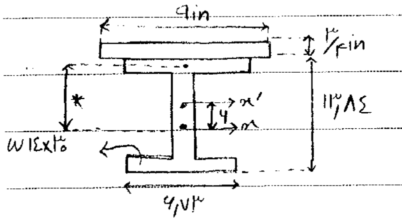
در اینجا چون برای المان انتخاب شده x مقداری ثابت است و برای نقاط مختلف المان تغییر نمی‌کند نیازی به استفاده از روش قبلی نیست و از روش عادی استفاده می‌کنیم

$$I_y = \int x^2 \times (y\,dx) = \int x^2 \frac{b}{a^2} x^2 dx = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^4 dx$$

$$= \frac{b}{a^2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{b}{a^2} \times \frac{a^5}{5} = \frac{ba^3}{5}$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{b^3a/21}{ab/3}} = \frac{b}{\sqrt{7}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{\frac{ba^3}{5}}{ab/3}} = a \times \sqrt{\frac{3}{5}}$$

مثال: ممان دوم اینرسی و شعاع چرخش مقطع نشان داده شده در شکل زیر را نسبت به محور گذرنده از مرکز سطح آن بدست آورید؟



ابتدا محاسبه محل مرکز سطح شکل مرکب:
وسط ارتفاع مقطع I شکل را مبنا در نظر گرفتیم
و فاصله مرکز سطح تا این محور مبنا را از روابط محاسبه مراکز سطح اشکال مرکب محاسبه می‌کنیم

$\bar{y} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i}$ W14x30 $\begin{cases} A = 8.85\ in^2 \\ I_x = 291\ in^4 \end{cases}$

$$* = \frac{13.84}{2} + \frac{3/4}{2} = 7.295$$

$$\bar{y} = \frac{8.85 \times 0 + (9 \times 3/4) \times 7.295}{8.85 + 9 \times 3/4} = 3.156\ in$$

$I_{x'} \simeq \Sigma I_{x'_i} = I_{x'_1} + I_{x'_2}$

ورق $I_{x'_1} = \frac{9 \times (3/4)^3}{12} + (9 \times 3/4) \times (7.295 - 3.156)^2 \simeq 116\ in^4$

$I_{x'_2} = 291 + 8.85 \times 3.156^2 \simeq 379.1\ in^4$ $\Rightarrow I_{x'} \simeq 495.1\ in^4$

$r_{x'} = \sqrt{\frac{I_{x'}}{A}} \Rightarrow A = 8.85 + 9 \times 3/4 = 15.6 \quad r_{x'} \simeq \sqrt{\frac{495.1}{15.6}} = 5.63\ in$

Tamasha

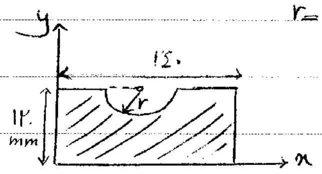
نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک کارشناسی مهندس احمدرضا جعفری، دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

WWW.iransaze.com

مثال: ممان اینرسی شکل زیر را نسبت به محور x محاسبه کنید؟

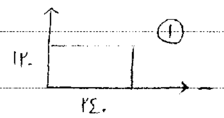
شکل را به صورت یک مستطیل که از آن یک نیم دایره کم شده در نظر می‌گیریم

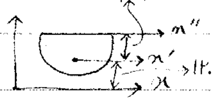
r = 90 mm



$\frac{4r}{3\pi} = 38.2$

$I_x = I_{x_1} - I_{x_2}$





$120 - 38.2$ $\quad I_{x_1} = \frac{bh^3}{3} = \frac{140\times120^3}{3} = 138.2\times10^6\ mm^4$

مستطیل نسبت به قاعده

چون محور x از مرکز سطح نیم دایره نمی‌گذرد باید از قضیه محورهای موازی استفاده کنیم در اینجا محور x' را از مرکز نیم دایره عبور می‌دهیم اما ممان اینرسی نیم دایره حول این محور را نداریم و ممان اینرسی نیم دایره حول محور گذرنده از مرکز نیم دایره را داریم که ابتدا باید با کمک آن و قضیه محورهای موازی $I_{x'}$ را بدست آوریم

$I_{x''} = I_{x'} + Ad^2 \Rightarrow \frac{\pi\times90^4}{8} = I_{x'} + \left(\frac{\pi\times90^2}{2}\right)\times38.2^2$

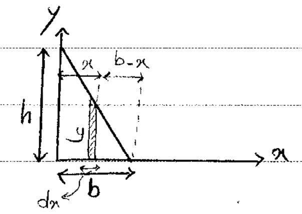
$\Rightarrow I_{x'} = 7.2\times10^6\ mm^4$

حال دوباره از قضیه محورهای موازی جهت محاسبه ممان اینرسی نیم دایره حول محور x کمک می‌گیریم

$I_{x_2} = I_{x'} + Ad^2 \Rightarrow I_{x_2} = 7.2\times10^6 + \left(\frac{\pi\times90^2}{2}\right)\times81.8^2 = 92.3\times10^6\ mm^4$

$I_x = I_{x_1} - I_{x_2} = 138.2\times10^6 - 92.3\times10^6 = 45.9\times10^6\ mm^4$

مثال: برای مثلث شکل زیر مطلوب است محاسبه حاصلضرب سطح نسبت به محورهای x و y برای مثلث شکل زیر؟



$I_{xy} = \int xy\,dA$

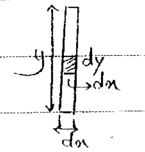
تشابه $\Rightarrow \frac{y}{h} = \frac{b-x}{b} \Rightarrow y = \frac{b-x}{b}h$

نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک کارشناسی مهندس احمدرضا جعفری، دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

WWW.iransaze.com

در المان انتخاب شده x ثابت و y متغیر است پس ابتدا باید حول این المان با یک انتگرال گیری مقدار حاصلضرب سطح را محاسبه کرده و سپس دوباره از آن انتگرال گیری شود

$$I_{xy}=\int xy\,dA=\int dI_{xy} \qquad xy\,dA=dI_{xy}$$



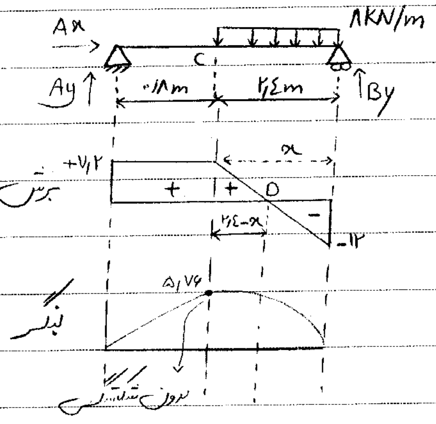
$$dI_{xy}=\int xy\,dA=\int_0^y xy\,dx.dy$$

$$=x\,dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^y=\frac{xy^2}{2}dx$$

$$I_{xy}=\int dI_{xy}=\int_0^b \frac{xy^2}{2}dx=\int_0^b \frac{x}{2}\times\left(\frac{b-x}{b}\times h\right)^2dx=\frac{h^2}{2b^2}\int_0^b (b^2x-2bx^2+x^3)\,dx$$

$$=\frac{h^2}{2b^2}\left[\frac{b^2x^2}{2}-\frac{2bx^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_0^b=\frac{h^2}{2b^2}\left(\frac{b^4}{2}-\frac{2b^4}{3}+\frac{b^4}{4}\right)=\frac{h^2}{2b^2}\times\frac{b^4}{12}=\frac{h^2b^2}{24}$$

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام برش و خمش برای تیر با بارگذاری نشان داده شده؟



$\Sigma F_x=0 \Rightarrow A_x=0$

$\curvearrowleft \Sigma M_B=0 \Rightarrow -A_y\times 3.2+8\times 2.4\times 1.2=0$

$A_y=7.2\,KN\uparrow$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow 7.2-8\times 2.4+B_y=0 \Rightarrow B_y=12\,KN\uparrow$

$V_B=7.2-8\times 2.4=-12$

تشابه: $\dfrac{x}{2.4-x}=\dfrac{12}{7.2} \Rightarrow x=1.5\,m$

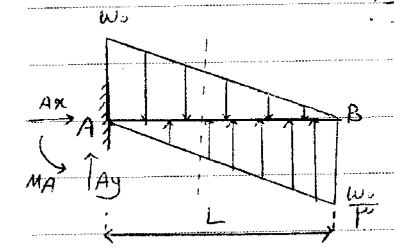
$M_C=7.2\times 0.8=5.76$

$M_D=5.76+7.2\times 0.9=9$

$M_B=9-12\times 1.5=0$

Tamasha

مثال: دیاگرام برش و لنگر تیر شکل زیر را رسم کنید؟



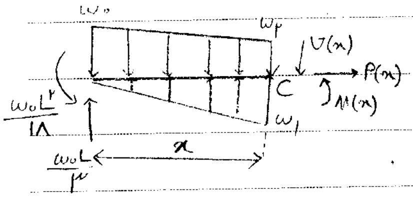
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{w_0 L}{2} + \frac{w_0}{3} \times \frac{L}{2} = 0$$

$$A_y = \frac{w_0 L}{3}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - \left(\frac{w_0 L}{2}\right)\frac{L}{3} + \left(\frac{w_0}{3} \times \frac{L}{2}\right) \times \frac{2L}{3} = 0$$

$$M_A = \frac{w_0 L^2}{18}$$

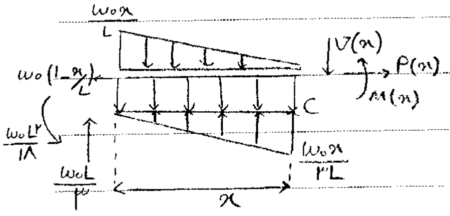


یک مقطع برای شکل C ما می‌بریم

مقادیر w_1 و w_2 باید با توجه به تشابه دو مثلث از رو مثلث پایین و بالا محاسبه شود

مثلث پایین: $\frac{w_1}{\frac{w_0}{3}} = \frac{x}{L} \Rightarrow w_1 = \frac{w_0 x}{3L}$

مثلث بالا: $\frac{w_2}{w_0} = \frac{L - x}{L} \rightarrow L w_2 = L w_0 - w_0 x \Rightarrow w_2 = \frac{L w_0 - w_0 x}{L} = w_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)$



ذوزنقه بالا را به یک مستطیل و مثلث تجزیه می‌کنیم

$$\Rightarrow w_0 - w_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) = w_0 - w_0 + \frac{w_0 x}{L} = \frac{w_0 x}{L}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{w_0 L}{3} - \frac{w_0 x}{L} \times \frac{x}{2} - w_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)x + \frac{w_0 x}{3L} \times \frac{x}{2} - V(x)$$

$$= \frac{w_0 L}{3} - \frac{w_0 x^2}{2L} - w_0 x + \frac{w_0 x^2}{L} + \frac{w_0 x^2}{6L} - V(x)$$

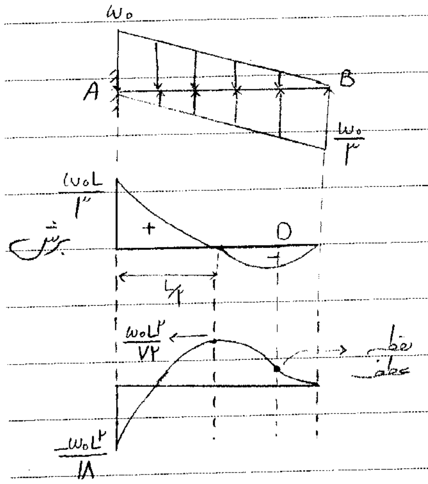
$$= \frac{w_0 L}{3} - w_0 x + \frac{2 w_0 x^2}{3L} - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = \frac{2 w_0 x^2}{3L} - w_0 x + \frac{w_0 L}{3}$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \frac{w_0 L^2}{18} - \frac{w_0 L x}{3} + \left[\frac{w_0 x}{L} \times \frac{x}{2}\right] \times \frac{2}{3}x + \left[w_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)x\right]\frac{x}{2} -$$

$$\left[\frac{w_0 x}{3L} \times \frac{x}{2}\right] \times \frac{x}{3} + M(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{w_0 L^2}{18} - \frac{w_0 L x}{3} + \frac{w_0 x^2}{2} + \frac{w_0 x^3}{L}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{18}\right] + M(x) = 0$$

$$M(x) = \frac{2 w_0 x^3}{9L} - \frac{w_0 x^2}{2} + \frac{w_0 L x}{3} - \frac{w_0 L^2}{18}$$



با توجه به معادله بدست آمده برای برش، نمودار برش یک سهمی است که چون ضریب x^2 مثبت است خم آن رو به بالا می باشد. برای رسم این سهمی مقدار برش در ابتدا و انتها و ترجیحاً نقطه ای که برش در آن صفر می شود را بدست می آوریم

$$V(0)=\frac{w_0L}{3} \quad و \quad V(L)=0$$

$$V(x)=0 \quad \left(V(x)\times\frac{3L}{2w_0}\right) \Rightarrow x^2-\frac{3L}{2}x+\frac{L^2}{2}=0$$

$$\Delta=\left(\frac{3L}{2}\right)^2-\frac{4L^2}{2}\times 1=\frac{9L^2}{4}-\frac{4L^2}{2}=\frac{L^2}{4}$$

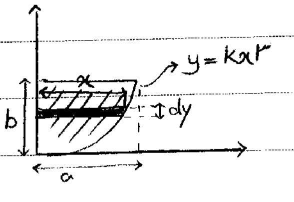
$$x=\frac{3L/2\pm\sqrt{L^2/4}}{2} \begin{cases} x=L \\ x=L/2 \checkmark \end{cases} \Rightarrow V(L/2)=0$$

دیاگرام خمش از درجه ۳ می باشد، از ابتدا تا وسط تیر چون برش مثبت است لنگر صعودی است و از وسط تا انتها نزولی

از ابتدا تا نقطه D که برش نزولی است خم منحنی لنگر رو به پایین و از نقطه D تا انتهای تیر چون برش صعودی است خم منحنی لنگر رو به بالا می باشد، نقطه D نقطه عطف منحنی است

$$M(0)=-\frac{w_0L^2}{18}, \quad M(L/2)=\frac{w_0L^2}{72} \quad M(L)=0$$

مثال: ممان اینرسی شکل زیر را با انتگرال گیری نسبت به محورهای x و y بدست آورید



$$x=a,\ y=b \Rightarrow b=ka^3$$

$$\Rightarrow k=b/a^3 \Rightarrow y=\frac{b}{a^3}x^3$$

$$I_x=\int y^2 dA$$

برای تمام نقاط المان y مقداری ثابت است

$$dA=dy\times x \qquad y=\frac{b}{a^3}x^3 \Rightarrow x^3=\frac{a^3y}{b} \rightarrow x=a\sqrt[3]{y/b}$$

WWW.iransaze.com

چون بر حسب dy انتگرال گیری انجام می‌شود باید تمام متغیرها نیز بر حسب y باشند

$$dA = a\sqrt[3]{y/b} \times dy \Rightarrow I_x = \int_0^b y^2 \times a\sqrt[3]{y/b}\, dy = \frac{a}{\sqrt[3]{b}} \int_0^b y^{7/3} dy$$

چون انتگرال بر حسب y است حدود انتگرال نیز بر حسب y تعیین می‌گردد

$$\Rightarrow I_x = \frac{a}{\sqrt[3]{b}} \left[\frac{y^{10/3}}{10/3}\right]_0^b = \frac{3a}{10\sqrt[3]{b}} \times b^{10/3} = \frac{3}{10} a b^3$$

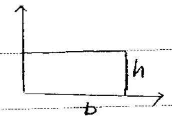
برای I_y می‌توان با همین المان انتگرال گیری کرد و یا از یک المان عمودی استفاده کرد، در اینجا از همین المان افقی استفاده می‌کنیم

در اینجا مقدار x در نقاط مختلف المان متغیر است پس

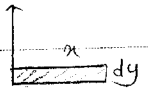
$$I_y = \int x^2 dA$$

بجای این روش ممان اینرسی المان را با توجه به ممان اینرسی مستطیل محاسبه و از آن انتگرال گیری می‌کنیم

$$I_y = \int_0^b dI_y$$



$$\Rightarrow I_y = \frac{b^3 h}{3}$$



$$\Rightarrow dI_y = \frac{x^3 dy}{3}$$

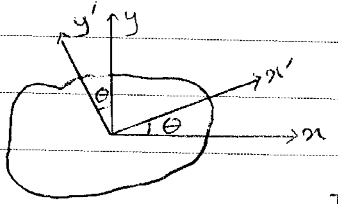
چون انتگرال گیری بر حسب y انجام می‌شود باید x را نیز بر حسب y بنویسیم

$$\Rightarrow dI_y = \frac{(a\sqrt[3]{y/b})^3 dy}{3} = \frac{a^3 y}{3b} dy \qquad I_y = \int_0^b \frac{a^3 y}{3b} dy = \frac{a^3}{3b} \int_0^b y\, dy$$

$$= \frac{a^3}{3b} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b = \frac{a^3 b^2}{6b} = \frac{a^3 b}{6}$$

Date : / /

محاسبه ممان اینرسی حول محورهای مورب:

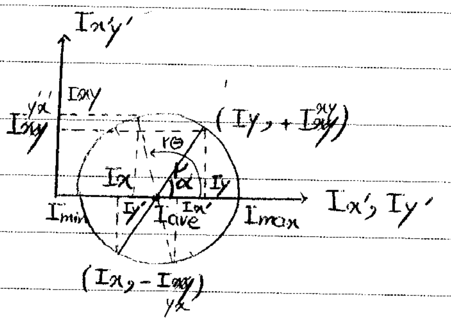


$$I_{x'}=\frac{I_x+I_y}{2}+\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'}=\frac{I_x+I_y}{2}-\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'}=\frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

روابط بالا را می‌توان بصورت یک دایره به نام دایره موهر برای ممان اینرسی نمایش داد



$$\begin{cases} I_{max}=I_{ave}+R \\ I_{min}=I_{ave}-R \end{cases}$$

$$I_{ave}=\frac{I_x+I_y}{2}$$

$$R=\sqrt{\left(\frac{I_y-I_x}{2}\right)^2+I_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{-2I_{xy}}{I_x-I_y}$$

برای محاسبه ممان های اینرسی در دستگاه مختصات $x'y'$ قطر اولیه دایره را که ممان های اینرسی در دستگاه مختصات xy را مشخص می‌کند به اندازه 2θ می‌چرخانیم. جهت چرخش هم جهت با چرخشی است که محورهای x باید داشته باشند تا به محورهای x' و y' تبدیل شوند

ممان های اینرسی برای هر دستگاه مختصات با محورهای متعامد با یکی از قطرهای دایره موهر قابل نمایش است. در دایره موهر محور افقی نشان دهنده ممان های اینرسی حول دو محور اصلی و محور عمودی نشان دهنده ممان اینرسی حاصلضرب سطح مقطع است

Tamasha

WWW.iransaze.com

در حالتی که برای یک دستگاه مختصات حاصلضرب سطح مقطع صفر باشد محورهای آن دستگاه مختصات را محورهای اصلی می نامند. در این حالت ممان اینرسی حول یکی از دو محور حول max و حول محور دیگر min می شود

α : زاویه محورهای اصلی با محورهای x و y

در محورهای اصلی : $I_{xy}=0$

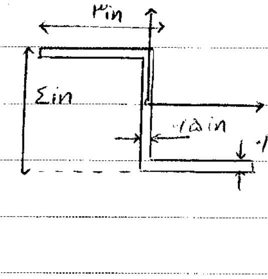
$I_x, I_y = I_{max}, I_{min}$

قطری از دایره موهر که منطبق بر محور افقی است نشان دهنده ممان های اینرسی در دستگاه مختصات اصلی است

نکته : اگر قطر نشان دهنده ممان های اینرسی در دایره بصورت عمودی در آید مقدار حاصلضرب سطح max و برابر شعاع دایره و ممان های اینرسی با هم برابر و مساوی مختصات مرکز دایره می شود

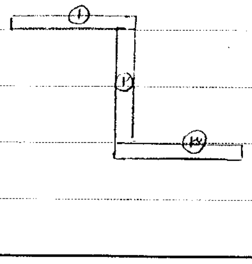
$(I_{xy})_{max} = R \qquad I_x = I_y = I_{ave}$

مثال : مقطعی در شکل نشان داده شده است لنگرهای لختی این مقطع نسبت به محورهای x و y عبارتند از: $I_y = 6.97\ in^4$, $I_x = 10.38\ in^4$ مطلوبست تعیین : الف) جهت گیری محورهای اصلی مقطع حول نقطه O ب) لنگرهای لختی اصلی مقطع حول نقطه O

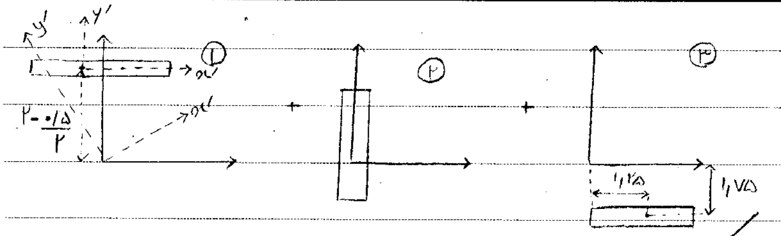


ابتدا مقدار I_{xy} را محاسبه می کنیم :

برای این منظور شکل را به ۳ مستطیل تقسیم می کنیم



WWW.iransaze.com



$I_{xy} = I_{x'y'} + A \cdot \bar{x}\bar{y}$

محورهای x'y' را از مرکز سطح شکل عبور می‌دهیم
چون برای هر ۳ شکل محورهای x'y' گذرنده از مراکز سطح سه شکل
محورهای تقارن آنها نیز هستند مقدار $I_{x'y'}$ برای هر سه شکل صفر است

$I_{xy_1} = 0 + (3 \times 0.5) \times (-1.25 \times 1.75) = -3.28 \ in^4$

$I_{xy_2} = 0$

$I_{xy_3} = 0 + (3 \times 0.5) \times (1.25 \times -1.75) = -3.28$

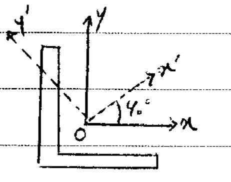
$I_{xy} = -3.28 + 0 - 3.28 = -6.56 \ in^4$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2 I_{xy}}{I_x - I_y} = \dfrac{-2 \times 6.56}{10.38 - 6.97} = 3.85 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 75.4 \\ 2\alpha = 255.4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 37.7 \\ \alpha = 127.7 \end{cases}$

$I_{max,min} = \dfrac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \dfrac{10.38 + 6.97}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{10.38 - 6.97}{2}\right)^2 + (-6.56)^2}$

$\Rightarrow \begin{cases} I_{max} = 15.45 \\ I_{min} = 1.897 \end{cases} in^4$

مثال: مقطعی مطابق شکل مفروض است. لنگرها و حاصلضرب لختی این مقطع نسبت به محورهای x و y عبارتند از: $I_x = 7.24 \times 10^6 \ mm^4$ و $I_y = 2.91 \times 10^6 \ mm^4$ و $I_{xy} = -2.54 \times 10^6$ با استفاده از دایره موهر مطلوبست تعیین: الف) محورهای اصلی مقطع حول نقطه O ب) لنگرهای لختی اصلی مقطع حول نقطه O ج) لنگرها و حاصلضرب لختی این مقطع نسبت به محورهای x' و y' که با محورهای x و y زاویه 60° می‌سازند.



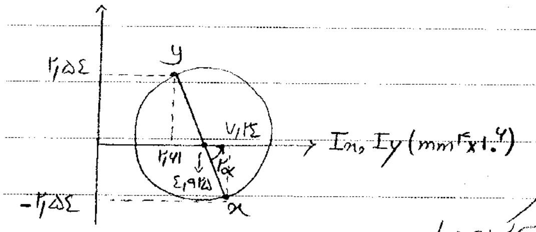
Tamasha

WWW.iransaze.com

مختصات مرکز دایره:

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} = 10^6 \times \frac{7.24 + 2.61}{2} = 4.925 \times 10^6\ mm^4$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 10^6 \sqrt{\left(\frac{7.24 - 2.61}{2}\right)^2 + (-2.54)^2} = 3.437 \times 10^6\ mm^4$$



$$x(I_x, I_{xy}) = x(7.24, -2.54) \times 10^6$$

$$y(I_y, -I_{xy}) = y(2.61, 2.54) \times 10^6$$

روی دایره دو نقطه با مختصات زیر را مشخص کرده و با اتصال آنها به هم قطر متناظر دایره را رسم می‌کنیم

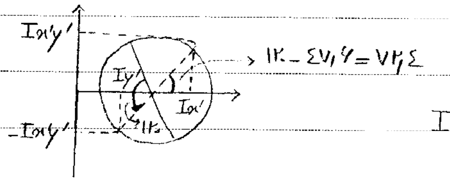
$$\tan 2\alpha = \frac{2.54}{(7.24 - 2.61)/2} = 1.097$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 47.6 \Rightarrow \alpha = 23.8^\circ$$

$$I_{max} = I_{ave} + R = (4.925 + 3.437) \times 10^6 = 8.36 \times 10^6\ mm^4$$

$$I_{min} = I_{ave} - R = (4.925 - 3.437) \times 10^6 = 1.49 \times 10^6\ mm^4$$

برای محاسبه ممان‌های اینرسی حول محورهای x' و y' قطر دایره را که مشخص کننده ممان‌های اینرسی در دستگاه مختصات xy است به اندازه ۱۲۰° و پادساعتگرد می‌چرخانیم



$$I_{x'} = I_{ave} + R\cos 72.4 = (4.925 + 3.437\cos 72.4) \times 10^6 = 5.96 \times 10^6\ mm^4$$

$$I_{y'} = I_{ave} - R\cos 72.4 = (4.925 - 3.437\cos 72.4) \times 10^6 = 3.89 \times 10^6\ mm^4$$

$$I_{x'y'} = R\sin 72.4 = 3.437 \times 10^6 \sin 72.4 = 3.28 \times 10^6\ mm^4$$

WWW.iransaze.com

کار مجازی:

کار یک نیرو: کار نیرو = F.r

$= |F| \times |r| \times \cos\alpha$

F: نیرو

r: جابجایی

α: زاویه بردار نیرو و بردار جابجایی

کار یک گشتاور: $M \times \theta$

θ: میزان دوران

اگر جابجایی دورانی هم جهت با نیرو یا گشتاور باشد کار مثبت است در غیر اینصورت کار منفی است

اصل کار مجازی:

جسمی را در نظر بگیرید که به آن نیروهای $F_1, F_2, \dots, F_n$ و گشتاورهای $M_1, M_2, \dots,$
M_m وارد می شود به جسم تغییر شکل کوچکی می دهیم به گونه ای که نقاط محل اثر نیروها ۲
دچار بردارهای جابجایی $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ و نقاط محل اثر گشتاورها دچار چرخش
های $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_m$ شود حال اگر جسم دارای تعادل باشد باید مجموع کارهای
انجام شده توسط نیروها و گشتاورها برابر صفر شود این مسئله را اصل کار مجازی می گوییم

$$W = \vec{F_1}\cdot\vec{\delta_1} + \vec{F_2}\cdot\vec{\delta_2} + \dots + \vec{F_n}\cdot\vec{\delta_n} + M_1\theta_1 + M_2\theta_2 + \dots + M_m\theta_m = 0$$

W: کار مجازی

- استفاده از اصل کار مجازی جهت حل مسائل تعادل اجسام صلب:

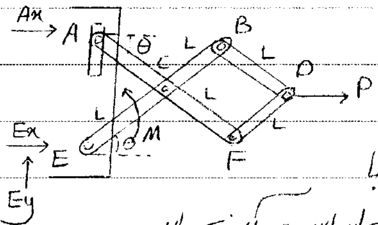
در جسم دوران یا تغییر شکل کوچک به صورت مجازی ایجاد می کنیم و بر اساس آن در نقاط مختلف جسم که به جسم نیرو وارد می شود تغییر شکل ها را محاسبه می کنیم یعنی در محل اثر نیروها بردار جابجایی و در محل اثر گشتاورها مقدار دوران را به دست می آوریم این محاسبات بر اساس تغییر شکل مجازی اولیه فرض شده اند

Tamasha

WWW.iransaze.com

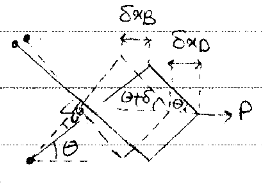
جسم می باشد و در محاسبات از خاصیت صلبیت جسم نیز استفاده می شود سپس اصل کار مجازی را می نویسیم و براساس آن مقادیر نیروهای مجهول را براساس اینکه جسم دارای تعادل باشد بدست می آوریم توجه کنید که چون نقطه اثر نیروها و لنگرهای که محل اثر آنها دچار تغییر شکل نمی شود کار انجام نمی دهند واکنش های تکیه گاهی که محل اثر آنها ثابت است کاری انجام نمی دهند و توسط این روش قابل محاسبه نیستند

مثال: با استفاده از روش کار مجازی اندازه کوپل M را که برای تعادل مجموعه زیر لازم است تعیین کنید.



فرض می کنیم زاویه θ مربوط به راستای EB به اندازه δθ بزرگ شود

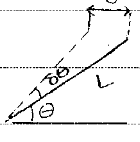
واکنش تکیه گاهی با توجه به آنکه نقطه اثر آن ها ثابت است کاری انجام نمی دهند و در اینجا تنها لنگر M و نیروی P هستند که می توانند کار انجام دهند که براساس آن باید مقدار دوران قطعه EB و جابجایی افقی نقطه D محاسبه شود، دوران قطعه EB را δθ فرض کرده‌ایم براساس همین دوران باید جابجایی افقی نقطه D را نیز محاسبه کنیم



در اثر بزرگ شدن زاویه θ نقاط C و B به سمت چپ حرکت کرده و اجباراً نقطه A به سمت بالا و F به سمت پایین و چپ حرکت می کند

نقاط B و F از هم دور می شوند که در نتیجه باعث می شود نقطه D به سمت چپ حرکت کند.

جابجایی افقی نقطه B: $\delta x_B = 2L\delta\theta\sin\theta$



$\delta = L\sin\theta\,\delta\theta$

به شرط آنکه δθ کوچک باشد

WWW.iransaze.com

جابه‌جایی سنبی D به B : $BD \times \sin\theta\,\delta\theta = L\,\delta\theta \sin\theta$

جابه‌جایی افقی D = $\delta x_D = 2L\,\delta\theta \sin\theta + L\sin\theta\,\delta\theta = 3L\sin\theta\,\delta\theta$

جابه‌جایی افقی نقطه D برابر است با مجموع جابه‌جایی افقی نقطه B و جابه‌جایی سنبی افقی نقطه D نسبت به B

قطعه EB بطول 2L به اندازه $\delta\theta$ دوران کرده است که در نتیجه نقطه B به اندازه $\delta\theta$ به سمت چپ حرکت می‌کند

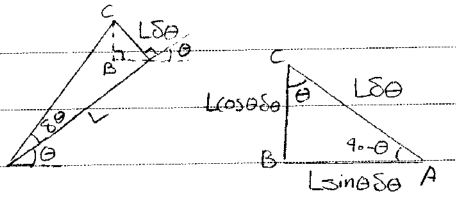
قطعه BD نیز به اندازه $\delta\theta$ دوران کرده است که در نتیجه نقطه D به اندازه $L\delta\theta$ به B نزدیک شده است

کار نیروی P با توجه به آنکه بردار نیرو و بردار جابه‌جایی خلاف جهت هم هستند منفی است اما کار گشتاور M با توجه به آنکه بردار گشتاور و جهت چرخش هم جهت است مثبت است

$$+M\delta\theta - P.(3L\delta\theta) = 0 \Rightarrow M\delta\theta = 3PL\delta\theta\sin\theta$$

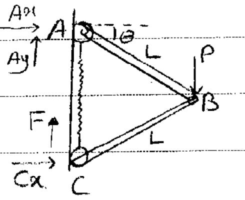
(زیر پرانتز: $\sin\theta$)

$$\Rightarrow M = 3PL\sin\theta$$



چون $\delta\theta$ در برابر θ کوچک است از آن صرف نظر می‌کنیم

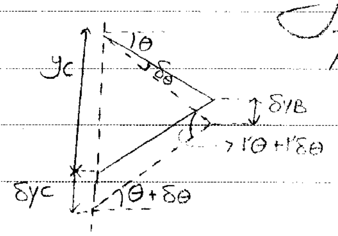
مثال: در شکل زیر مطلوبست محاسبه زاویه θ و نیروی فنر متناظر با حالت تعادل؟
فرض می‌کنیم میله AB به اندازه $\delta\theta$ و بصورت ساعتگرد دوران کند در نتیجه نقطه B به سمت پایین و چپ حرکت می‌کند و با توجه به آنکه طول میله BC ثابت است نقطه C نیز مجبور است به سمت پایین حرکت کند و زاویه θ مربوط به میله BC نیز بزرگ شود



Tamasha

WWW.iransaze.com

چون مثلث ABC قبل و بعد از دوران متساوی الساقین است دوران قطعه BC نیز مساوی دوران قطعه AB است



$$y_C = 2L\sin\theta$$

$$\delta y_B = L\cos\theta\,\delta\theta$$

$$\delta y_C = 2L\cos\theta\,\delta\theta$$

جابجایی عمودی نقطه C برابر مجموع جابجایی عمودی نقطه B و جابجایی عمودی نسبی C به B است که هر دو نیز با هم برابرند

h: طول آزاد فنر
k: ثابت فنر
⇐ داده مسأله

$y_C - h = 2L\sin\theta - h$ افزایش طول فنر (قبل از دوران مجازی)

$F = k(2L\sin\theta - h)$ نیروی فنر قبل از دوران

چون مقدار دوران مجازی کوچک فرض می‌شود می‌توان فرض کرد که تغییر شکل فنر و نیروی فنر قبل و بعد از این دوران با هم یکسان است

اصل کار مجازی: در اینجا فقط P و F کار انجام می‌دهند که از این بین کار نیروی F منفی است

$$P\delta y_B - F\delta y_C = 0 \Rightarrow P\delta y_B = F\delta y_C$$

$$PL\cos\theta\,\delta\theta = k(2L\sin\theta - h)\,2L\cos\theta\,\delta\theta$$

$$P = 2k(2L\sin\theta - h) \Rightarrow P = 4kL\sin\theta - 2kh \qquad \sin\theta = \frac{P + 2kh}{4kL}$$

$$\Rightarrow \theta = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{P + 2kh}{4kL}\right)$$

$$\delta y_B = \tfrac{1}{2}\delta y_C \Rightarrow P\,\delta y_C/2 = F\delta y_C \Rightarrow F = P/2$$

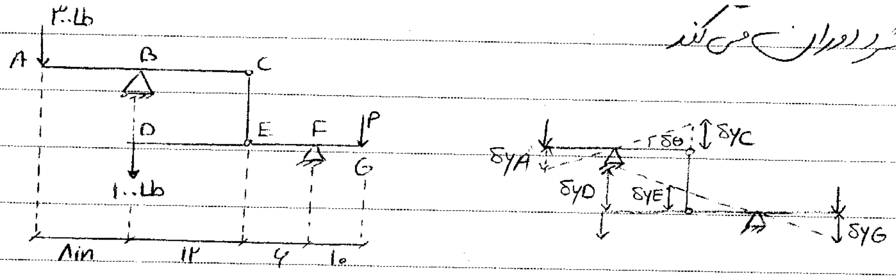
نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک کارشناسی مهندس احمدرضا جعفری، دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

WWW.iransaze.com

مثال: مطلوبست تعیین نیروی عمودی P که مجموعه در تعادل باشد.

فرض می‌شود که میله ABC به اندازه $\delta\theta$ و

پادساعتگرد دوران می‌کند



$\delta y_A = \delta\theta \times 8$

$\delta y_C = \delta y_E = 12\delta\theta$

تشابه: $\dfrac{\delta y_E}{\delta y_D} = \dfrac{6}{18} \Rightarrow \delta y_D = 3\delta y_E \qquad \delta y_D = 36\delta\theta$

$\dfrac{\delta y_E}{\delta y_G} = \dfrac{6}{10} \Rightarrow \delta y_G = \frac{10}{6}\delta y_E \qquad \delta y_G = \frac{10}{6} \times 12\delta\theta = 20\delta\theta$

کار نیروهای ۳۰۰ و P مثبت و ۱۰۰ منفی است

اصل کار مجازی:

$300 \times 8\delta\theta - 100 \times 36\delta\theta + P \times 20\delta\theta = 0$

$20P\delta\theta = 1200\delta\theta \Rightarrow P = 60\,Lb$

شهلا نیابتی

Tamasha